



TITLE:

# 開水路流れの水深積分モデルの高精度化とその応用に関する研究(Dissertation\_全文)

AUTHOR(S):

音田, 慎一郎

---

CITATION:

音田, 慎一郎. 開水路流れの水深積分モデルの高精度化とその応用に関する研究. 京都大学, 2005, 博士(工学)

ISSUE DATE:

2005-03-23

URL:

<https://doi.org/10.14989/doctor.k11542>

RIGHT:

新制
工
1337

# 開水路流れの水深積分モデルの高精度化と その応用に関する研究

2004年12月

音田 慎一郎

# 開水路流れの水深積分モデルの高精度化と その応用に関する研究

2004年12月

音田 慎一郎

# 目 次

	頁
1. 序論	1
2. 鉛直加速度を考慮した開水路流れの基礎式の高精度化とその検証	9
2.1 概説	9
2.2 基礎式の誘導過程	11
2.2.1 流速分布の第1修正と運動量方程式	11
2.2.2 分散項の修正	14
2.2.3 流速分布、圧力分布の第2修正	15
2.3 線形解析	16
2.3.1 非回転条件のみを考慮した基礎式の線形解と微小振幅波理論の比較	16
(1) 線形分散関係	16
(2) 流速分布	17
(3) 解析結果の考察	17
2.3.2 改良モデルの線形解と微小振幅波理論の比較	19
(1) 線形分散関係	19
(2) 流速分布	19
(3) 解析結果の考察	20
2.4 矩形水槽内水面振動の鉛直2次元数値解析	22
2.4.1 数値解析法	22
(1) 基礎式	22
(2) 計算法の概要	23
2.4.2 初期振幅が小さい場合の数値解析結果の考察	24
2.4.3 初期振幅が大きい場合の数値解析結果の考察	24
2.5 非線形解析結果と数値計算結果の比較	25
2.5.1 1次モードによる分散関係	25
2.5.2 2次モードを加えた非線形解析	28
2.6 結語	31
3. 移動一般座標系での水深積分モデルを用いた水槽内流体解析	34
3.1 概説	34
3.2 加速度場に置かれた水槽内の流体挙動	35
3.2.1 基礎式	35
3.2.2 現象の定性的考察	36



(1) 簡易モデルによる現象の定性的記述	36
(2) 特性曲線法による考察	37
3.2.3 数値解析法	39
3.2.4 計算結果の考察	40
3.3 壁の運動により生じる水槽内流体解析	40
3.3.1 壁が一定速度で移動する場合	41
(1) 基礎式	41
(2) 数値解析法	42
(3) 理論的考察	42
(4) 結果と考察	44
3.3.2 右壁を振動させる場合	44
(1) 基礎式	44
(2) 数値解析法	45
(3) 線形解	45
(4) 考察	48
3.4 振動台上に置かれた水槽内流体振動解析	55
3.4.1 振動台上の水槽内流体振動に関する水理実験	55
(1) 実験の概要	55
(2) 実験結果	56
3.4.2 浅水流方程式での基礎式系	56
(1) 基礎式	56
(2) 数値解析法	57
(2) 線形解	57
3.4.3 鉛直加速度を考慮した場合	61
(1) 基礎式	61
(2) 線形解	62
3.4.4 考察	66
3.5 結語	70
 4. 小規模河床波の発生・発達過程と流れの抵抗則の数値解析	 73
4.1 概説	73
4.2 加速・減速流の流速分布の簡易モデルと底面せん断応力の評価	75
4.2.1 加速・減速流に関する実験結果の考察	75
4.2.2 簡易モデル	76
(1) 加速・減速効果を考慮した流速分布の誘導	76
(2) 流速分布形の計算手順	79

4.2.3 実験結果と簡易モデルの比較	80
4.3 基礎式	82
4.3.1 鉛直加速度を考慮した波状路床上の水面形方程式	82
4.3.2 底面せん断応力の評価	83
4.3.3 路床変動モデル	84
4.4 数値解析法	84
4.5 計算条件	87
4.6 数値解析結果と考察	88
4.6.1 砂堆の形成機構	89
4.6.2 砂堆の形状特性	92
4.6.3 反砂堆	93
4.6.4 無次元波数 $kh$ とフルード数 $Fr$ による領域区分	94
4.6.5 流れの抵抗則	95
4.7 結語	97
 5. 主流の流速分布変化を考慮した湾曲流の水深積分モデルとその検証	 101
5.1 概説	101
5.2 モデルの誘導過程	102
5.2.1 Engelund モデル	102
5.2.2 主流方向流速の変化を考慮した 2 次流のモデル化	104
5.2.3 計算手順	109
5.2.4 本モデルにおける流速分布, 運動量輸送係数の基本的特性	111
5.3 モデルの適用	112
5.4 結果と考察	115
5.5 結語	116
 6. 移動一般座標系による 3 次元数値解析	 118
6.1 概説	118
6.2 数値解析法の概要	118
6.2.1 基礎式	118
6.2.2 乱流モデル	119
6.2.3 計算法の概要	120
(1) 計算スキーム	120
(2) 壁面及び水面の取り扱い	121
6.3 モデルの適用	121
6.3.1 加速・減速流	121

(1) 計算条件	121
(2) 計算結果の考察	122
6.3.2 連続蛇行水路	123
(1) 計算条件	123
(2) 計算結果の考察	123
6.4 結語	138
<b>7. 結論</b>	<b>141</b>

# 第1章 序論

## 研究の背景と目的

河川は、本来有している姿、例えば水の流れ、河床形態、音、自然環境などが自然科学的な魅力に満ちており、たくさんの人々を魅了してきたとともに、歴史・文化の中心として人間社会に深く関わってきた。これは、世界の古代文明が、大河川流域で芽生え、発達したことからも理解できよう。

河川には、治水、利水、河川環境と3つの機能がある。この3つの機能を自然、社会、経済、人文的側面との関連において総合的に設定することが河川計画である<sup>1)</sup>が、この計画は自由に設定できるものではなく、計画によって河川と流域との基本的関係が大きく規定されてしまうため、河川事業は社会的、経済的制約を受けて行われてきた。

過去の河川整備を辿ってみると、計画の力点は時代とともに変遷している。本格的な河川事業が始まった戦国時代から明治時代に至るまでの河川整備は、主に治水である。一般に日本の河川は、急流であると言われ、人口、資産の大半は河川によって作り上げられた沖積平野に集積されている。自然条件的には非常に水害が発生しやすく、一度洪水が起きれば、沖積平野は浸水し、人命・資産に甚大な被害を及ぼす。その結果、治水事業に重点が置かれたのは当然のことであろう。

その後、産業の発展、高度経済成長を迎えるとともに利水事業へも力点が置かれる。この頃から、それまで優先されてきた治水事業が相対化され、他の事業との整合性から整備が図られる。その結果、費用に対する便益を上げようする余り、河川の画一化、無機質化が進み、蛇行した流路は直線化され、河道は強固な堤防で囲まれた。そして、河川本来の自然環境の多様性、美しい水辺空間は失われていった。このような観点から考えると、河川事業によるマイナスの面ばかりが浮かび上がるが、その一方でこうした河川事業により、治水技術は飛躍的に向上したのも事実



(a) 2004 年 7 月福井豪雨災害



(b) 2004 年 10 月台風 23 号

## 写真-1.1 河川災害の被災状況

である。しかし、ここ数年各地で頻発する局地的集中豪雨により、福岡 (1999)、名古屋 (2000)、北陸、四国、近畿地方 (2004) など、今なお甚大な被害を被っている (写真-1.1<sup>2)</sup>)。特に、2004 年の災害では、浸水被害だけではなく、土砂災害も顕著であった。表-1.1 は水害被害密度の推移を示したものである<sup>3)</sup>。人口・資産の集中した都市域が被災したため、水害被害密度が急増していることが分かる。そのため、浸水面積は広くないものの、総水害被害額はほぼ一定の傾向を示している。治水安全度が向上したとはいえ、防災対策には十分な検討が必要であると考えられる。

表-1.1 水害被害密度の推移

西暦	1980	1985	1990	1995	2000
水害被害密度 (億円/km <sup>2</sup> )	5.8	14.4	19.8	24.7	44.2

また近年、環境問題への関心も高まり、「持続可能な発展」の概念があらゆる分野で謳われている。これは、環境と調和し、自然との共存・共生を求めるという姿勢である。当然、河川計画においてもこの概念を深化するべきであり、河川が本来有している良好な生物環境に配慮し、自然環境を保全・創出することが求められる。「多自然型川づくり」など様々な取り組み<sup>4)</sup>が実際に進められており、河道内に瀬や淵、植生といった多様な空間を設け、生態系に配慮した河川環境を形成するとともに、自然本来の景観をも取り戻すことを目指している。このような姿勢は、平常時における水辺のあり方にも目を向けることであるが、先に述べた河川の3つの機能を考慮すると、洪水時、平常時という言葉が相反する局面について検討する必要がある。防災計画から河川環境に至るまで総合的にマネジメントを考えなければならない。その際、自然環境に対して、急激な変化を与えると負荷が大きく、再生するにはかなりの時間や困難さを要する場合がある。また、多様な空間を設けることで、境界形状さらには水の流れ、土砂輸送の力学的特性も複雑になると考えられる。従って、総合的なマネジメントを行うには、ある程度の再現性が確保でき、起こり得る可能性も予測できるシミュレーション技術の発展が重要となる。

河川技術は、一般に種々の土木技術の中でもかなり特殊性が強いと言われる。それは、変化に富み、その特性が十分明らかにされていない中で、人々が長年にわたり河川に働きかけた歴史的蓄積物の上に技術を発現するところに起因する<sup>5)</sup>ようである。即ち、今日においても合理的で実証的な検証を受けた技術は確立されておらず、河川に期待される各機能の最大化を図る試みによって発展してきたのである。しかし、自然環境への関心が高まり、河川事業に対する技術論のみならず計画の目的をもが批判させる今日、これまでの試行錯誤的な取り組みだけでは不十分であり、蓄積されてきた技術とシミュレーション技術を組み合わせ、精度の高い技術・知識の援用が必要となる。これまで、実河川における現象の諸特性の解明を目的として、現地観測、水理実験、理論解析などが精力的に行われ、数多くの成果があげられてきた。一方、近年のコンピュータのハード的、ソフト的な目覚ましい進歩に反映し、複雑な数値シミュレーションも可能となった。こうした成果をもとに、現象を解明、更には予測できる一般的な方法の確立とその結果の評価、応用が重要な課題であると考えられる。

本研究は、河川流域や海岸海域など様々な水域環境の防災、持続可能なマネジメントを考える際に必要となる、流れと土砂輸送（または地形変化）の実用的数値解析モデルの発展と高精度化を目的としている。治水、利水、河川環境を3つの柱として、総合的な河川整備が検討される中、河川の源流域から河口までの治水、利水、河川環境に係わる諸問題を水系一貫して取り扱うためには、河川源流域から河口までの長区間対象領域を少なくとも平面2次元的に取り扱う流れと土砂輸送の数値解析モデルを構築し、予測技術を確立することが必要となる。その際、平面2次元モデルの中に流れの3次元構造やそれに伴う複雑な土砂輸送特性をできるだけ考慮し、水深積分

モデルの精度を向上させる必要がある。特に、河道蛇行部の流れと土砂輸送、河床波の発達・減衰と流れの抵抗変化などを、水深積分モデルを用いて上流から下流まで一貫した予測ができれば実用上有用と考えられるからである。

そこで本研究では、3次元性が強い流れ場を対象に、3次元解析結果を考察することで水深積分モデルに3次元構造を反映して、平面2次元モデルの高精度化を計るとともに、モデルの実水域を対象とした応用について検討する。その際、高レイノルズ数の3次元流れ解析では、用いる乱流の構成則（乱流モデル）が問題となるため、3次元乱流解析についても別途考察する。

## 本研究で対象とする事象

水深積分モデルによる流れと土砂輸送の数値解析は、実用性の観点から汎用的に用いられている。最近の進歩を踏まえた河川流のモデリングと河床・河道変動解析については、細田<sup>3)</sup>によって体系的に講述され、水深積分モデルによって様々な現象がある程度再現できることが報告されている。しかし、対象とする現象によっては、従来の水深積分モデルでは解析できなかったものもある。これは、モデル化が不十分であるためと考えられ、モデルの精度を向上させることで予測可能になると思われる。本研究は、積分型モデルの理論をさらに拡張させようとするものであり、ここでは対象とする事象と研究方針について記述する。

### (1) 波と流れの共存場の水面変動

河川流を取り扱う場合には、圧力分布に静水圧を仮定した水深積分モデルを用いることが多い。しかし、海岸海域まで含めて解析する際、波の波長が水深に対して短くなると、静水圧の仮定が成立しなくなるため、鉛直加速度を考慮した水深積分モデル（Boussinesq 方程式）を適用する必要がある。鉛直加速度を考慮した水深積分モデルは、海岸工学の分野ではよく用いられており、海岸海域など波と流れの共存場の水面変動予測だけでなく、波状段波、波状跳水などを再現できる実用的なモデルである。

原形 Boussinesq 方程式は、例えば水の波に適用した場合、高波数領域で微小振幅波理論の分散関係と適合しないため、原形 Boussinesq 方程式に関して様々な修正モデルが提案されてきた。これらのモデルでは、一般に流速分布が任意の高さの流速と河川流解析の基本量である水深平均流速との陰的な関係で表されている。しかし、河川流域、海岸海域を一貫して解析する際には、共通の速度変数をパラメータに用いることが有用であると考えられる。そこで本研究では、基礎式を水深平均流速で陽的かつ簡易に表すことに着目し、原形 Boussinesq 方程式の改良について検討する。

### (2) 移動一般座標系での水深積分モデルによる水槽内流体振動解析

河川流と河床変動解析を行う場合、河道形状に適合した移動一般座標系とその座標系での基礎

式がよく用いられている。例えば、自由境界である水面や河床を座標軸として基礎式を記述し、河川流や局所洗掘の多次元数値解析が行われている<sup>6,7)</sup>。本研究で対象としている水深積分モデルについても、移動一般座標系で表記され<sup>8)</sup>、河岸侵食を伴う河川の流路変動解析<sup>9)</sup>が行われている。移動一般座標系での基礎式によりこうした複雑な現象に適用されたケースは数多く見かけるが、基本的な現象に適用し、考察するために用いられた研究は少ないと思われる。また、波と流れの共存場を解析する際に用いられる鉛直加速度を考慮した水深積分モデル（Boussinesq 方程式）では、一般に固定格子点での基礎式が用いられ、移動一般座標系で解析された研究は少ない。そこで本研究では、単純で基本的な水理現象を取り上げ、移動一般座標系で記述された水理解析法について考察する。

### (3) 河床波の形成と流れの抵抗則

河床には、流れの状態に応じて種々の河床波が生じる。河床波はそのスケールに応じて中規模河床波と小規模河床波に分類されるが、対象とする河床形態によって河川工学的な意義が異なる。中規模河床波が発達すると、河岸に沿って局所的な深掘れ、堆積が生じ、護岸や根固め等の河川構造物が被災する原因となるため、その挙動の把握が必要となる。一方、小規模河床波が生じると、その形態によって流れに及ぼす影響、即ち流れの抵抗が変化するため、抵抗がどのように変化するか予測する必要がある。

中規模河床波の発生に関しては、静水圧を仮定した通常的水深積分モデルと平衡流砂モデルを用いた線形安定解析から水理条件によって微小擾乱が不安定になることが示され<sup>10)</sup>、これらの基礎式の組み合わせによって交互砂州、複列砂州の数値解析が行われている<sup>11,12,13)</sup>。

小規模河床波についても、水深積分モデルを用いて砂堆の発生・発達過程に関する数値解析<sup>14)</sup>が行われているが、その形成機構、流れの抵抗則までは再現されていない。本研究では、水深積分モデルを用いて小規模河床波の発生・発達過程と流れの抵抗則を再現できる数値解析モデルの構築を試みる。

### (4) 湾曲部・蛇行河道部の流れ

湾曲部・蛇行河道部では、遠心力と圧力差に起因する 2 次流が生じ、それに伴い外岸側では土砂が侵食、内岸側では堆積し、流れは蛇行する。侵食性護岸であれば河岸侵食を伴い、流路も大きく変動する。このように湾曲部・蛇行河道部では 2 次流の影響を考慮する必要があり、2 次流及び 2 次流による横断方向の運動量輸送を水深積分モデルに組み込む方法が提案されている<sup>15)</sup>。その中で、直交曲線座標系及び一般座標系において 2 次流が主流の湾曲に遅れずに追従する場合と、遅れを考慮した場合の定式化が示されている。

また、水深積分モデルに土砂輸送モデル、河岸侵食モデルを組み込み、蛇行流路の変動現象に関する数値解析<sup>9,16)</sup>も行われており、ある程度再現できることが報告されている。

一方、Blanckaert<sup>17)</sup>は、急激に湾曲する水路において実験を行い、2 次流によって主流方向流速及び主流方向の底面せん断応力が再分配（変形）し、主流方向流速分布の一様化或いは最大流速点が降下することが指摘している。これは、従来行われてきた連続蛇行水路の実験<sup>18,19)</sup>において



も確認されている。従って、これまで検討された主流方向に等流を仮定するモデル化では不十分であると考えられ、2 次流による主流方向流速の再分配を考慮する必要がある。この点を踏まえ、本研究では 2 次流を考慮したモデルの高精度化について検討する。

## 本研究の構成

本論文は、前節で述べた事象について検討することで、開水路流れの水深積分モデルの高精度化を目指す。以下に、各章での検討内容を示す。

**第 2 章**では、鉛直加速度を考慮した開水路流れの水深積分モデルについて基礎式を水深平均流速で陽的かつ簡易に表すことに着目し、モデルの改良について検討する。基礎式の誘導に際し、非回転条件に適合する流速分布形を求める方法と Madsen & Schaffer<sup>20)</sup>がポテンシャル流れに対して用いた線形分散関係の singularity を解消する分散項の修正法を適用するとともに、この修正を流速分布、圧力分布に反映させて平均流速を用いた分布形を導く。導かれた基礎式を矩形水槽内水面振動現象に適用し、線形解析、非線形解析と微小振幅波理論或いは鉛直 2 次元数値解析結果を比較することでモデルの検証を行う。

**第 3 章**では、流れ場の境界形状が変化する場合にも適用できるよう、移動一般座標系で記述された水理解析法について考察する。本章では、前述のように複雑な現象に適用するのではなく、単純で基本的な水理現象を取り上げる。例として、一定加速度場や振動台上に置かれた水槽内の流体挙動、造波板のように水槽の壁が動くことにより生じる波と流れなどを取り扱う。各々のケースに応じて静水圧を仮定した水深積分モデル（浅水方程式）を移動一般座標系での基礎式に変形し、数値解析を行う。また、波と流れが共存場として考えられる振動台上の水槽内流体挙動については、波の波長が水深に対して短くなると静水圧の仮定が成立しなくなるため、鉛直加速度を考慮した場合についても検討する。さらに、理論解析、線形解析などを求め、数値解析結果と比較することで計算結果との適合性を検証する。

**第 4 章**では、水深積分モデルを用いた小規模河床波の発生・発達過程と流れの抵抗則について数値解析を行う。水深積分モデルを基礎式として河川流、河床変動解析を予測する場合、流速分布形の変化をできるだけモデルに考慮し、運動量方程式に現れる底面せん断応力項などを精度よく評価する必要がある。本章ではまず、河床波上や河道蛇行部流れにおいて生じる流れの加速・減速効果をモデルに反映させ、加速・減速流の流速分布に関する簡易モデルを誘導する。求めたモデルと従来用いられている底面せん断応力の評価式を比較することで、評価式の適用性について検討する。次に、鉛直加速度を考慮した水深積分モデルと非平衡流砂モデルを組み合わせ、小規模河床波の発生・発達過程に関する数値解析を行う。発達過程における非定常特性、平衡状態での河床波の形状特性、流れの抵抗則に関して、従来の研究と詳細に比較することにより、モデルの適用性を検討する。

**第 5 章**では、湾曲部、河道蛇行部で生じる 2 次流を水深積分モデルに組み込み、モデルの高精

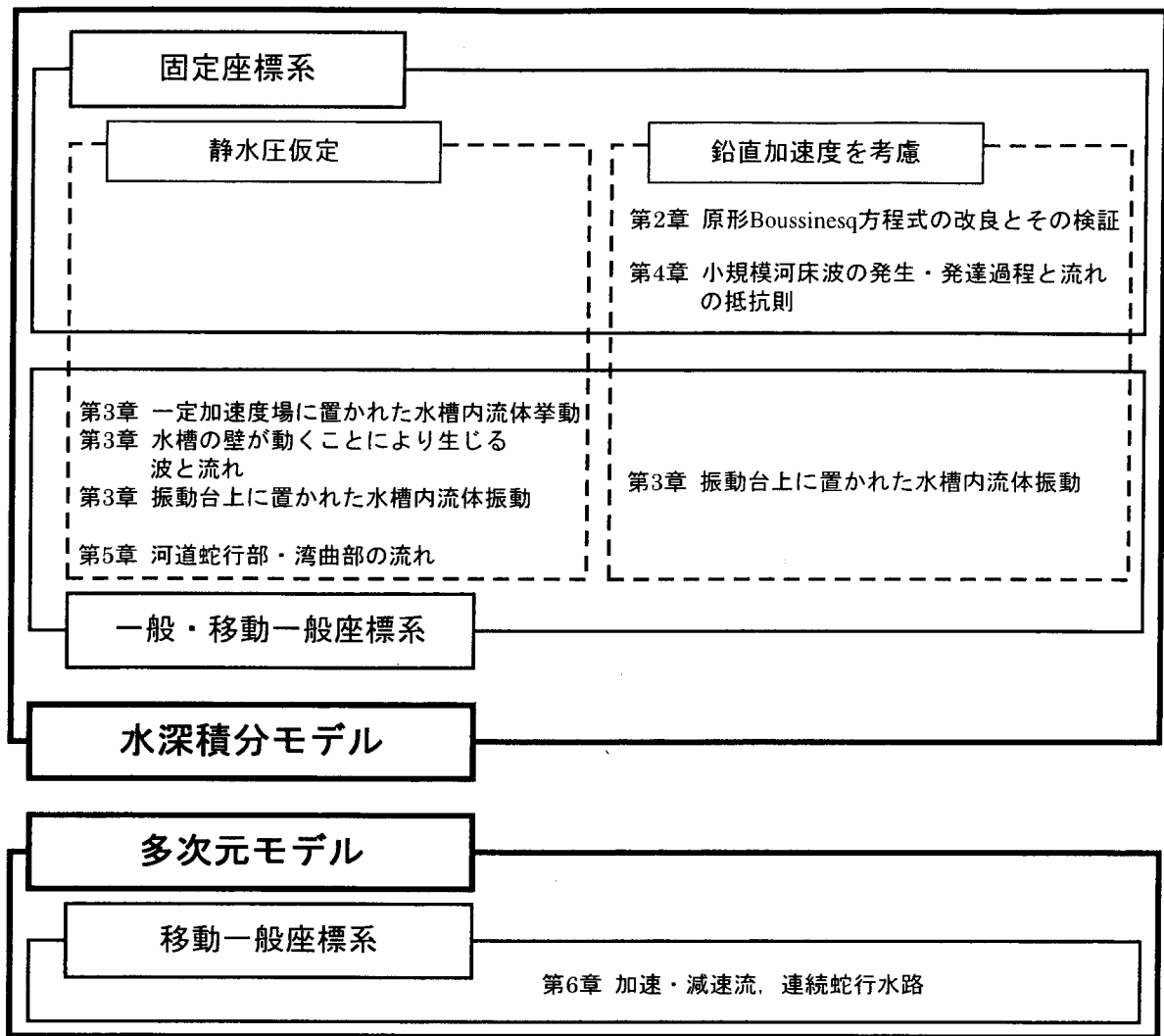


図-1.1 本研究での検討内容とモデルの分類

度化について検討する。まず、これまで行われてきた研究について知見を整理し、2次流をモデル化する上で考慮すべき条件について分析する。次に、上記の条件を踏まえ、2次流のモデル化を理論的に考察する。ここで提示するモデルの特徴としては、横断方向流速による主流方向流速の変形を考慮することである。さらに、導かれたモデルを実験水路に適用し、従来のモデルより実現象を再現できることを示す。

**第6章**では、上記のモデルの改良に際し必要となる3次元複雑乱流解析を行う。基礎式には、前述のように、自由境界である水面や河床を座標軸として記述した移動一般座標系における反変成分表示のものをを用いる。第4章と関連する加速・減速流、第5章と関係する連続蛇行水路に適用し、実験結果と比較することでモデルの妥当性を検証する。この3次元解析結果を水深積分モデルの高精度化のための理論構築やモデル開発に用いるべく、解析結果の分析を行う。

上記の検討内容とモデルの分類を示すと、図-1.1のようにまとめられる。

**第7章**では、主要な成果をとりまとめ、本論文の結論とする。

## 参考文献

- 1) 岩佐義朗：最新河川工学，森北出版株式会社，pp.84-98，1979.
- 2) 国土交通省河川局ホームページ (<http://www.mlit.go.jp/river/index.html>)
- 3) 土木学会水理委員会・海岸工学委員会：2002 年度（第 38 回）水工学に関する夏期研修会講義集，2002.
- 4) 財団法人リバーフロント整備センター編：河川と自然環境，2000.
- 5) 山本晃一：河道計画の技術史，山海堂，1999.
- 6) 木村一郎，細田 尚，音田慎一郎：非線形  $k-\epsilon$  モデルによる斜め越流型水制周辺の三次元流況に関する数値解析，応用力学論文集，第 6 号，pp.717-726，2002.
- 7) Nagata, N., Hosoda, T., Nakato T. and Muramoto, Y. : 3D numerical simulation of flow and local scour around a cylindrical pier, *J. Hydrosoci. and Hydraulic Eng.*, vol.19, No.2, pp.113-125, 2002.
- 8) 細田 尚，長田信寿，村本嘉雄：移動一般座標系による開水路非定常流の数値解析，土木学会論文集 No.553/II-34，pp.267-272，1996.
- 9) 長田信寿：流路変動過程の数値解析法とその応用に関する研究，京都大学学位論文，1998.
- 10) 黒木幹男，岸 力：中規模河床波の領域区分に関する理論的研究，土木学会論文報告集，第 342 号，pp.87-96，1984.
- 11) 清水康行，板倉忠興，山口 甲：2 次元モデルを用いた河床形態変化のシミュレーション，第 31 回水理講演会論文集，pp.689-694，1987.
- 12) 長田信寿，村本嘉雄，内倉嘉彦，細田 尚，矢部昌之，高田保彦，岩田通明：各種河道条件下における交互砂州の挙動について，水工学論文集，第 43 巻，pp.743-748，1999.
- 13) 竹林洋史，江頭進治，中川博次：直線水路における自己形成流路の形成条件と形成機構，水工学論文集，第 44 巻，pp.771-776，2000.
- 14) 細田 尚，加藤隆彰：水深積分モデルによる砂堆の発生・発達過程の数値シミュレーション，水工学論文集，第 44 巻，pp.617-622，2000.
- 15) 細田 尚，長田信寿，岩田通明：一般座標系での主流と 2 次流の遅れを考慮した平面 2 次元モデル，水工学論文集，第 44 巻，pp.587-592，1999.
- 16) 清水康行，平野道夫，渡邊康玄：河岸侵食と自由蛇行の数値解析，水工学論文集，第 40 巻，pp.921-926，1996.
- 17) Blanckaert, K : Flow and turbulence in sharp open-channel bends, PhD-thesis, Ecole Polytechnique Federale de Lausanne.
- 18) 玉井信行，池内幸司，山崎 晶：連続わん曲水路における流れの実験的研究，土木学会論文集，第 331 号/，pp.83-94，1983.
- 19) 石川忠晴，金 舜範：湾曲部の 2 次流に関する基礎的研究，土木学会論文集，第 375 号/II-6，pp.143-149，1986.
- 20) Madsen, P.A. and Schaffer, H.A. : High order Boussinesq-type equations for surface gravity waves-derivation and analysis, *Phil. Trans. R. Soc. Lond.*, A356, pp.79-83, 1998.

## 第2章 鉛直加速度を考慮した開水路流れの 基礎式の高精度化とその検証

### 2.1 概説

沿岸域の波浪など波と流れの共存場の水面変動を予測する最も基本的な基礎式は、次式で表される長波方程式（または浅水流方程式）である。

[連続式]

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial q}{\partial x} = 0 \quad (2.1)$$

[運動量方程式]

$$\frac{\partial q}{\partial t} + \frac{\partial qU}{\partial x} + Gh \frac{\partial h}{\partial x} = 0 \quad (2.2)$$

ここに、 $t$ ；時間， $x$ ；空間座標， $h$ ；水深， $U$ ；水深平均流速， $q$ ；単位幅流量， $G$ ；重力加速度。

上式は、波形を急峻にする非線形性と波形をなだらかにする分散性について、非分散・強非線形の特徴を有している。そのため、非線形性が強くなってくると、波形が一方向的に急峻化し、最終的には碎波のようにショック面を形成する<sup>1)</sup>。長波方程式を用いる場合には、流速分布の一様性、圧力分布が静水圧と仮定できる場合しか水面変動を予測できない。

非線形性と分散性の両方を考慮できるモデルとして、Boussinesq が導いた鉛直加速度を考慮した水深積分モデル（Boussinesq 方程式）が挙げられる。ここでは、Iwasa<sup>2)</sup>によって導かれた基礎式を1次元で記述する。なお、連続式は式(2.1)で表される。

[運動量方程式]

$$\frac{\partial q}{\partial t} + \frac{\partial qU}{\partial x} + Gh \frac{\partial h}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \left[ \frac{h}{3} \left\{ -h \frac{\partial^2 q}{\partial x \partial t} + 2hU \frac{\partial^2 h}{\partial x \partial t} + hU^2 \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} \right\} \right]$$

$$+ h \frac{\partial U}{\partial t} \frac{\partial h}{\partial x} - U^2 \left( \frac{\partial h}{\partial x} \right)^2 - U \frac{\partial h}{\partial x} \frac{\partial h}{\partial t} \Bigg] = 0 \quad (2.3)$$

ここで、式(2.3)中の第 4 項が分散項を示している。

Boussinesq 方程式は海岸域の波・流れ共存場の水面変動の予測だけでなく、開水路流れの波状跳水<sup>3)</sup>や砂堆の発生・発達過程<sup>4)</sup>を再現できる実用的な水深積分モデルである。しかし、原形 Boussinesq 方程式は、例えば水の波に適用した場合、高波数領域で微小振幅波理論の分散関係と適合しない、波上路床上流れの底面せん断応力分布が再現できないなどの問題点がある。

そこで、原形 Boussinesq 方程式の修正に関して様々な改良が提案されてきた。Madsen ら<sup>5)</sup>は、分散項に長波方程式を空間的に 2 階微分した項を加え、線形分散関係が広範囲で適合するようにパラメータを同定した。Nwogu<sup>6)</sup>は、平均流速ではなく任意の高さの流速を速度変数として、非回転条件を近似的に満足する流速分布形を導入した。さらに、連続式、運動量方程式に代入し水深積分することで、任意の高さの流速をパラメータとした基礎式を誘導した。

また最近では、原形 Boussinesq 方程式の改良として、ポテンシャル流の基礎式、境界条件から高精度 Boussinesq 型モデルを求めるという新たなアプローチが展開されている。Madsen & Schaffer<sup>7)</sup>、Madsen ら<sup>8)</sup>、Agnon ら<sup>9)</sup>は、速度ポテンシャルを静水面から鉛直方向に展開した無限級数で表し、ラプラス方程式に代入して流速分布形を求めた。得られた流速分布を境界条件に代入することで、静水面での流速をパラメータとした基礎式を導いた。Gobbi ら<sup>10)</sup>は、Nwogu の方法を拡張し、任意の高さの 2 点で内挿した速度ポテンシャルを速度変数として基礎式を表記した。ここでは、代表的なモデルとして Madsen ら<sup>5)</sup>、Nwogu<sup>6)</sup>による提案式を以下に示す。なお、Nwogu の式は、代表的な波長  $l$ 、水深  $h_0$ 、振幅  $a_0$  を用いて  $\mu = h_0/l$ 、 $\varepsilon = a_0/h_0$  のように無次元された形で表される。

#### 1) Madsen らの提案式

[運動量方程式]

$$\frac{\partial q}{\partial t} + \frac{\partial q U}{\partial x} + G h \frac{\partial h}{\partial x} - \left( B_M + \frac{1}{3} \right) h^2 \frac{\partial^3 q}{\partial x^2 \partial t} - B_M G h^3 \frac{\partial^3 h}{\partial x^3} = 0, \quad B_M = \frac{1}{15} \quad (2.4)$$

#### 2) Nwogu の提案式

[連続式]

$$\eta_t + \nabla \cdot \left[ (h + \varepsilon \eta) \mathbf{u}_\alpha \right] + \mu^2 \nabla \cdot \left\{ \left( \frac{z_\alpha^2}{2} - \frac{h^2}{6} \right) h \nabla (\nabla \cdot \mathbf{u}_\alpha) + \left( z_\alpha + \frac{h}{2} \right) h \nabla [\nabla \cdot (h \mathbf{u}_\alpha)] \right\} = 0 \quad (2.5)$$

[運動量方程式]

$$\mathbf{u}_{\alpha t} + \nabla \eta + \varepsilon (\mathbf{u}_\alpha \cdot \nabla) \mathbf{u}_\alpha + \mu^2 \left\{ \frac{z_\alpha^2}{2} \nabla (\nabla \cdot \mathbf{u}_\alpha) + z_\alpha \nabla [\nabla \cdot (h \mathbf{u}_\alpha)] \right\} = 0 \quad (2.6)$$

[x 方向流速ベクトルの流速分布]

$$u = u_\alpha + \mu^2 \left( \frac{z_\alpha^2}{2} - \frac{z^2}{2} \right) \nabla (\nabla \cdot \mathbf{u}_\alpha) + \mu^2 (z_\alpha - z) \nabla [\nabla \cdot (h \mathbf{u}_\alpha)] \quad (2.7)$$

ここに、 $\eta$ : 水面の変動量、 $\nabla = \partial/\partial x$ 、 $\mathbf{u}_\alpha$ :  $z = z_\alpha$ での流速ベクトル、 $z_\alpha$ : 任意の高さであり、 $\alpha = (z_\alpha/h)^2/2 + (z_\alpha/h)$ の関係を満たす。

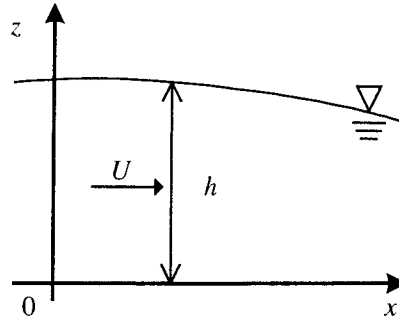


図-2.1 座標系の説明図

ここで、例えば Nwogu の提案した基礎式を見ても分かるように、従来より提案されてきた改良型モデルでは、流速分布を任意の高さの流速と水深平均流速の複雑な関係式として陰的に表しているものが多く、河川流などの基本量である水深平均流速と流速分布との関係を陽的に簡易に表している一般的なモデルは少ない。

そこで、本章では流速分布、基礎式を水深平均流速で陽的かつ簡易に表すことに着目して原形 Boussinesq 方程式の改良を行う<sup>11,12,13)</sup>。誘導過程を要約すると以下ようになる。

流速分布の一様性を仮定し、非回転条件と連続式を繰り返し用いることで非回転条件に適合する流速分布を求める方法<sup>14)</sup>を適用して流速分布の修正を行う。次に、得られた流速分布を運動方程式に代入し積分することで、圧力分布と運動量方程式を導く。さらに、このままでは高波数で分散関係の分母がゼロになるため、Madsen & Schaffer<sup>7)</sup>と類似の方法を適用してこの singularity を解消するとともに、分散項の修正を流速分布、圧力分布に反映させることを試みる。また、上記の誘導過程を考察することで、Madsen ら<sup>5)</sup>の改良では言及されていない長波方程式の空間的 2 階微分を分散項に加えた理由と明らかにされていない流速分布形について簡易な解釈を記述する。

導かれた基礎式を水槽内水面振動現象に適用し、線形・非線形解析と微小振幅波理論、および鉛直 2 次元数値解析結果を比較することで、モデルの検証を行った。

## 2.2 基礎式の誘導過程

### 2.2.1 流速分布の第 1 修正と運動量方程式

底面は平坦路床とし、路床に沿う流下方向、流下方向と垂直な方向をそれぞれ  $x$  軸、 $z$  軸とする。座標系を図-2.1 に示す。原形 Boussinesq 方程式の流速分布、運動量方程式の第 1 修正として、連続式と非回転条件を繰り返し用いることで、非回転条件に適合する流速分布形を求める方法<sup>11)</sup>を適用する。誘導過程を以下に示す。

$x$  方向の流速成分  $u$  を水深方向について一様と仮定すると次式となる。

$$u = U(x) \quad (2.8)$$

ここに、 $u$ ：流速ベクトルの  $x$  方向成分、 $U$ ：水深平均流速。

式(2.8)を連続式

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (2.9)$$

に代入し、 $z$  から  $h$  まで積分すると、 $z$  方向流速  $w$  の分布形として式(2.10)が得られる(この手順を過程1とする)。

$$w = \frac{z}{h} \left( \frac{\partial h}{\partial t} + U \frac{\partial h}{\partial x} \right) \quad (2.10)$$

ここに、 $w$  : 流速ベクトルの  $z$  方向成分。

上式を非回転条件

$$\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} = 0 \quad (2.11)$$

に代入し、積分することで  $u$  の分布形を求める(この手順を過程2とする)。

$$u = U + \frac{h^2}{2} A \left( \frac{z^2}{h^2} - \frac{1}{3} \right), \quad A = \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \frac{1}{h} \left( \frac{\partial h}{\partial t} + U \frac{\partial h}{\partial x} \right) \right\} \quad (2.12)$$

式(2.12)を用いて、過程1を繰り返す。

$$w = \frac{z}{h} \left( \frac{\partial h}{\partial t} + U \frac{\partial h}{\partial x} \right) + \frac{1}{6} \frac{\partial A h^2}{\partial x} z - \frac{1}{6} \frac{\partial A}{\partial x} z^3 \quad (2.13)$$

過程2を繰り返し、 $u$  を求め直す。

$$u = U + \frac{h^2}{2} B \left( \frac{z^2}{h^2} - \frac{1}{3} \right) + \frac{h^2}{12} \frac{\partial^2 A h^2}{\partial x^2} \left( \frac{z^2}{h^2} - \frac{1}{3} \right) - \frac{h^4}{24} \frac{\partial^2 A}{\partial x^2} \left( \frac{z^4}{h^4} - \frac{1}{5} \right) \quad (2.14)$$

再度、過程1を繰り返し、 $w$  を求め直す。

$$w = \frac{z}{h} \left( \frac{\partial h}{\partial t} + U \frac{\partial h}{\partial x} \right) + \left\{ \frac{1}{6} \frac{\partial B h^2}{\partial x} + \frac{1}{36} \frac{\partial}{\partial x} \left( h^2 \frac{\partial^2 A h^2}{\partial x^2} \right) - \frac{1}{120} \frac{\partial}{\partial x} \left( h^4 \frac{\partial^2 A}{\partial x^2} \right) \right\} z - \left( \frac{1}{6} \frac{\partial B}{\partial x} + \frac{1}{36} \frac{\partial^3 A h^2}{\partial x^3} \right) z^3 + \frac{1}{120} \frac{\partial^3 A}{\partial x^3} z^5 \quad (2.15)$$

$$B = A = \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \frac{1}{h} \left( \frac{\partial h}{\partial t} + U \frac{\partial h}{\partial x} \right) \right\} \quad (2.16)$$

ここで式(2.14), (2.15)中、例えば  $A h^2$  の空間微分については、

$$\frac{\partial A h^2}{\partial x} = h^2 \frac{\partial A}{\partial x} + 2 A h \frac{\partial h}{\partial x}$$

と変形されるが、本章では基礎式を簡易に表すことに着目すること、また水深が流下方向に徐々に変化すると仮定すると、上式の右辺第2項が無視できることから、第1項だけを考慮する。従って、 $h$  を微分の前に出し、 $A, B$  について空間微分を行うと、式(2.14), (2.15)は次のようになる。

$$u = U + \frac{h^2}{2} B \left( \frac{z^2}{h^2} - \frac{1}{3} \right) + \frac{h^4}{12} \frac{\partial^2 A}{\partial x^2} \left( \frac{z^2}{h^2} - \frac{1}{3} \right) - \frac{h^4}{24} \frac{\partial^2 A}{\partial x^2} \left( \frac{z^4}{h^4} - \frac{1}{5} \right) \dots \quad (2.17)$$

$$w = \frac{z}{h} \left( \frac{\partial h}{\partial t} + U \frac{\partial h}{\partial x} \right) + \left( \frac{h^2}{6} \frac{\partial B}{\partial x} + \frac{h^4}{36} \frac{\partial^3 A}{\partial x^3} - \frac{h^4}{120} \frac{\partial^3 A}{\partial x^3} \right) z - \left( \frac{1}{6} \frac{\partial B}{\partial x} + \frac{h^2}{36} \frac{\partial^3 A}{\partial x^3} \right) z^3 + \frac{1}{120} \frac{\partial^3 A}{\partial x^3} z^5 \dots \quad (2.18)$$

式(2.17), (2.18)を  $z$  方向の運動方程式

$$\frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\partial uw}{\partial x} + \frac{\partial ww}{\partial z} = -g - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z}$$

に代入し、 $z$  から  $h$  まで積分すると圧力分布の表示式(2.19)が得られる。但し、圧力分布を求める際、 $h$  に関する時間微分も含まれるが、前述の理由から空間微分と同様に取り扱うこととする。

$$\frac{p}{\rho} = G(h-z) + \left(1 - \frac{z^2}{h^2}\right)(D+H) + \left(1 - \frac{z^4}{h^4}\right)(E+I) + \left(1 - \frac{z^6}{h^6}\right)(F+K) + \dots \quad (2.19)$$

ここに、

$$\begin{aligned} C &= \frac{1}{h} \left( \frac{\partial h}{\partial t} + U \frac{\partial h}{\partial x} \right), \\ D &= \frac{h^2}{2} U \left( \frac{\partial C}{\partial x} + \frac{h^2}{6} \frac{\partial^2 B}{\partial x^2} + \frac{h^4}{36} \frac{\partial^4 A}{\partial x^4} - \frac{h^4}{120} \frac{\partial^4 A}{\partial x^4} \right) + \dots, \\ E &= \frac{h^4}{4} U \left( -\frac{1}{6} \frac{\partial^2 B}{\partial x^2} - \frac{h^2}{36} \frac{\partial^4 A}{\partial x^4} \right) + \dots, \\ F &= \frac{h^6}{6} U \left( \frac{1}{120} \frac{\partial^4 A}{\partial x^4} \right) + \dots, \\ H &= \frac{h^2}{2} \left( \frac{\partial C}{\partial t} + \frac{h^2}{6} \frac{\partial^2 B}{\partial x \partial t} + \frac{h^4}{36} \frac{\partial^4 A}{\partial x^3 \partial t} - \frac{h^4}{120} \frac{\partial^4 A}{\partial x^3 \partial t} \right) + \dots, \\ I &= \frac{h^4}{4} \left( -\frac{1}{6} \frac{\partial^2 B}{\partial x \partial t} - \frac{h^2}{36} \frac{\partial^4 A}{\partial x^3 \partial t} \right) + \dots, \\ K &= \frac{h^6}{6} \frac{1}{120} \frac{\partial^4 A}{\partial x^3 \partial t}. \end{aligned}$$

圧力分布、流速分布を  $x$  方向の運動方程式

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial uu}{\partial x} + \frac{\partial uw}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x}$$

に代入し、水深積分することで運動量方程式(2.20)を導く。

$$\begin{aligned} \frac{\partial q}{\partial t} + \frac{\partial qU}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{Gh^2}{2} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left\{ -\frac{1}{3} h^2 \frac{\partial^2 q}{\partial x \partial t} + \frac{1}{3} h^2 U^2 \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + \frac{2}{3} h^2 U \frac{\partial^2 h}{\partial x \partial t} \right. \\ \left. - \frac{1}{45} h^4 \frac{\partial^4 q}{\partial x^3 \partial t} + \frac{1}{45} h^4 U^2 \frac{\partial^4 h}{\partial x^4} + \frac{2}{45} h^4 U \frac{\partial^4 h}{\partial x^3 \partial t} \right. \\ \left. - \frac{2}{945} h^6 \frac{\partial^6 q}{\partial x^5 \partial t} + \frac{2}{945} h^6 U^2 \frac{\partial^6 h}{\partial x^6} + \frac{4}{945} h^6 U \frac{\partial^6 h}{\partial x^5 \partial t} \right\} + \dots = 0 \end{aligned} \quad (2.20)$$

式(2.20)の分散項をみると、微分的全階数、係数は異なるものの、3, 5, 7 階微分のそれぞれ 3 項を 1 つのまとまりとして、類似した形で表記されていることが分かる。そこで、流速分布、圧力分布式との対応関係を調べると、7 次の項は非回転条件を反復することで導かれ、式(2.17), (2.18), (2.19)の  $A$  の項から求められる。また、5 次の項は  $B$  の項から導かれる。Madsen & Schaffer<sup>7)</sup>が指摘するように流速分布に非回転条件のみを考慮しても、水の波の線形分散関係に分母が 0 になる点 (singularity) が存在するが、反復回数を増やすことでこの点は若干高波数へ移動する。微小振幅波理論と非回転条件のみを考慮した場合の線形分散関係、流速分布との比較については、2.3.1 で後述する。



## 2.2.2 分散項の修正

式(2.20)の微分の階数を減らし, singularity を解消するため, 圧力分布の水深積分から導かれる分散項の修正を考える. Madsen & Schaffer<sup>7)</sup>, Agnon ら<sup>9)</sup>は, ポテンシャル流の基礎式から Boussinesq 型モデルを導き, 分散項の修正を加え, モデルの高精度化を計っている. ここでは, 彼らが用いた方法と類似の修正法を式(2.20)に適用することを試みる.

修正の方法を簡単に記述すると次のようになる. 考えている微分方程式が次式で表されるとする.

$$L1(x) + L2(x) = \alpha \frac{d^2 L2(x)}{dx^2} + \dots, \quad \alpha: \text{定数}$$

上式中,  $L2$  は  $L1$  より高階とし, 右辺は左辺各項より微小とする.

このとき, 上式の第一近似は  $L2(x) = -L1(x)$  であり, これを右辺に代入すると微分の階数を減少させることができる. 但し代入する際,  $L2(x) = -\xi L1(x)$  のように定数を乗じて, 何らかの制約条件 (ここでは分散関係) を満足させることができるようにする.

上記の方法を式(2.20)に適用すると次のようになる. なお, 以下の修正は分散特性の向上を目的としているため, Madsen & Schaffer<sup>7)</sup>にならい, 式(2.21)右辺については移流項を無視している.

$$\begin{aligned} L2 &= \frac{1}{45} h^4 \frac{\partial^5 q}{\partial x^4 \partial t} - \frac{1}{45} h^4 U^2 \frac{\partial^5 h}{\partial x^5} - \frac{2}{45} h^4 U \frac{\partial^5 h}{\partial x^4 \partial t} \\ &\approx \frac{\partial q}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{Gh^2}{2} \right) - \frac{1}{3} h^2 \frac{\partial^3 q}{\partial x^2 \partial t} + \frac{1}{3} h^2 U^2 \frac{\partial^3 h}{\partial x^3} + \frac{2}{3} h^2 U \frac{\partial^3 h}{\partial x^2 \partial t} \end{aligned} \quad (2.21)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 L2}{\partial x^2} &= \frac{1}{45} h^4 \frac{\partial^7 q}{\partial x^6 \partial t} - \frac{1}{45} h^4 U^2 \frac{\partial^7 h}{\partial x^7} - \frac{2}{45} h^4 U \frac{\partial^7 h}{\partial x^6 \partial t} \\ &= \xi \left\{ \frac{\partial^3 q}{\partial x^2 \partial t} + \frac{\partial^3}{\partial x^3} \left( \frac{Gh^2}{2} \right) - \frac{1}{3} h^2 \frac{\partial^5 q}{\partial x^4 \partial t} + \frac{1}{3} h^2 U^2 \frac{\partial^5 h}{\partial x^5} + \frac{2}{3} h^2 U \frac{\partial^5 h}{\partial x^4 \partial t} \right\} \end{aligned} \quad (2.22)$$

式(2.20)中 7 次の項に, 式(2.22)を代入し, 整理すると以下のようになる.  $\xi$  が制約条件としての分散関係を近似的に満足させるための定数である.

$$\begin{aligned} \frac{\partial q}{\partial t} + \frac{\partial q U}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{Gh^2}{2} \right) + \frac{1}{3} h^2 U^2 \frac{\partial^3 h}{\partial x^3} + \frac{2}{3} h^2 U \frac{\partial^3 h}{\partial x^2 \partial t} - \frac{1}{3} h^2 \left( 1 + \frac{2}{7} \xi \right) \frac{\partial^3 q}{\partial x^2 \partial t} - \frac{2}{21} \xi h^2 \frac{\partial}{\partial x^3} \left( \frac{Gh^2}{2} \right) \\ - \frac{1}{45} h^4 \left( 1 - \frac{10}{7} \xi \right) \frac{\partial^5 q}{\partial x^4 \partial t} + \frac{1}{45} h^4 U^2 \left( 1 - \frac{10}{7} \xi \right) \frac{\partial^5 h}{\partial x^5} + \frac{2}{45} h^4 U \left( 1 - \frac{10}{7} \xi \right) \frac{\partial^5 h}{\partial x^4 \partial t} = 0 \end{aligned} \quad (2.23)$$

また, 式(2.20)中の 3 次の項について上記の方法を適用し, 5 次の項に式(2.25)を代入すると式(2.26)が得られる.

$$\begin{aligned} L2 &= \frac{1}{3} h^2 \frac{\partial^3 q}{\partial x^2 \partial t} - \frac{1}{3} h^2 U^2 \frac{\partial^3 h}{\partial x^3} - \frac{2}{3} h^2 U \frac{\partial^3 h}{\partial x^2 \partial t} \\ &\approx \frac{\partial q}{\partial t} + Gh \frac{\partial h}{\partial x} \end{aligned} \quad (2.24)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 L2}{\partial x^2} &= \frac{1}{3} h^2 \frac{\partial^5 q}{\partial x^4 \partial t} - \frac{1}{3} h^2 U^2 \frac{\partial^5 h}{\partial x^5} - \frac{2}{3} h^2 U \frac{\partial^5 h}{\partial x^4 \partial t} \\ &= \eta \left\{ \frac{\partial^3 q}{\partial x^2 \partial t} + Gh \frac{\partial^3 h}{\partial x^3} \right\} \end{aligned} \quad (2.25)$$

$$\frac{\partial q}{\partial t} + \frac{\partial q U}{\partial x} + Gh \frac{\partial h}{\partial x} - \left( \frac{\eta}{15} + \frac{1}{3} \right) h^2 \frac{\partial^3 q}{\partial x^2 \partial t} - \frac{\eta}{15} Gh^3 \frac{\partial^3 h}{\partial x^3} + \frac{2}{3} h^2 U \frac{\partial^3 h}{\partial x^2 \partial t} + \frac{1}{3} h^2 U^2 \frac{\partial^3 h}{\partial x^3} = 0 \quad (2.26)$$

Madsen ら<sup>5)</sup>の提案式(2.4)は、平均流速が小さい場合について検討したものであるため、式(2.26)の左辺第 6, 7 項を無視し、 $\eta=1$  とすると、式(2.26)は式(2.4)と一致する。Madsen らは、原形 Boussinesq 方程式の分散項に長波方程式を空間的に 2 階微分した項を加える理由について言及していないが、上記の誘導から次のように解釈できる。即ち Madsen らの改良は、非回転条件を満足するよう流速分布形を修正し、それによって導かれる高次の分散項に、より低次の方程式を代入して微分の階数を減らしていると考えられる。

### 2.2.3 流速分布、圧力分布の第 2 修正

本章では、後述するように矩形水槽内水面振動現象に適用し、基礎式の検証を行っている。水槽内水面振動現象と同様に、急激な水面変動を伴う現象の例として、波状段波が挙げられる。波状段波のように非定常性が卓越する場合、平均流速が小さいと仮定し、原形 Boussinesq 方程式の鉛直加速度非定常項（時間微分を伴う項）のみを考慮することで、流況をある程度再現できることが報告されている<sup>15)</sup>。水槽内水面振動現象においても、非定常性が強く、鉛直加速度非定常項を考慮することで、流況を再現できると考えられる。従って、平均流速が無視できる場合について分散項の修正を反映させ、流速分布、圧力分布の第 2 修正を検討する。

2.2.2 で行った分散項の修正は、運動量方程式(2.20)において最も微分の階数の高い 7 次の項を無視し、5 次の項を 3 次以下の項で表した関係式(2.21)を 7 次の項に代入している。2.2.1 で前述したように、7 次の項は流速分布式(2.17)、(2.18)の A の項より導かれることから、A と 5 次の項をより低次の項で表した関係式(2.21)とを関係付けることで、流速分布の第 2 修正を求めることができると考えられる。そこで、次元的考察から A についての関係式を求めると、時間積分を用いて次式のように表すことができる。

$$\frac{\partial^2 A}{\partial x^2} = -\frac{45\xi}{h^5} \left\{ \int \frac{\partial q}{\partial t} dt + Gh \int \frac{\partial h}{\partial x} dt - \frac{1}{3} h^2 \int \frac{\partial^3 q}{\partial x^2 \partial t} dt \right\} \quad (2.27)$$

なお、式(2.27)を用いた流速分布、圧力分布を  $x$  方向の運動方程式に代入し、水深積分することで得られる運動量方程式が式(2.23)と一致することを確認している。

式(2.27)を流速分布式(2.17)、(2.18)に代入することで本改良モデルの流速分布が求められる。また、圧力分布についても式(2.27)を式(2.19)に代入すれば計算できる。さらに同様な考察より、Madsen ら<sup>5)</sup>の提案式では明らかにされていない流速分布を以下のように求めることができる。但し、式(2.17)、(2.18)中の A の項を 0 とし、B に式(2.28)を代入する。

$$B = -\frac{3\eta}{h^3} \left\{ \int \frac{\partial q}{\partial t} dt + Gh \int \frac{\partial h}{\partial x} dt \right\}, \quad \frac{\partial^2 A}{\partial x^2} = 0 \quad (2.28)$$

平均流速が無視できない場合については、時間積分だけでなく空間積分の導入が必要であると推測される。

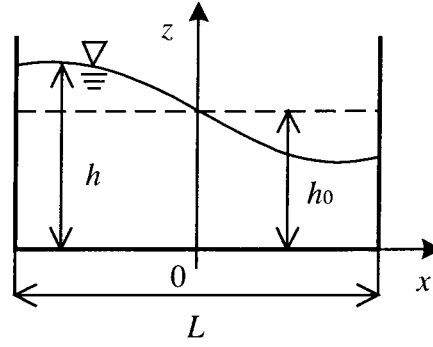


図-2.2 矩形水槽内水面振動現象

## 2.3 線形解析

### 2.3.1 非回転条件のみを考慮した基礎式の線形解と微小振幅波理論の比較

#### (1) 線形分散関係

次式のように水理量を平均値と微小な偏差の和として表し、基礎式系を線形化する。

$$h = h_0 + h', \quad U = U_0 + U'$$

ここに、 $h_0$ 、 $U_0$  はそれぞれ平均水深、水深平均流速の平均値を、 $h'$ 、 $U'$  はそれからの偏差を表したものであり、水槽内水面振動では  $U_0 = 0$  である。上式を式(2.1)および式(2.20)に代入し、 $U'$  を消去すると、 $h'$  に関する次のような線形方程式が得られる。

$$\begin{aligned} & -\frac{\partial^2 h'}{\partial t^2} - 2U_0 \frac{\partial^2 h'}{\partial x \partial t} - (U_0^2 - Gh_0) \frac{\partial^2 h'}{\partial x^2} + \frac{1}{3} h_0^2 U_0^2 \frac{\partial^4 h'}{\partial x^4} + \frac{2}{3} h_0^2 U_0 \frac{\partial^4 h'}{\partial x^3 \partial t} + \frac{1}{3} h_0^2 \frac{\partial^4 h'}{\partial x^2 \partial t^2} \\ & + \frac{1}{45} h_0^4 U_0^2 \frac{\partial^6 h'}{\partial x^6} + \frac{2}{45} h_0^4 U_0 \frac{\partial^6 h'}{\partial x^5 \partial t} + \frac{1}{45} h_0^4 \frac{\partial^6 h'}{\partial x^4 \partial t^2} \\ & + \frac{1}{945} h_0^6 U_0^2 \frac{\partial^8 h'}{\partial x^8} + \frac{2}{945} h_0^6 U_0 \frac{\partial^8 h'}{\partial x^7 \partial t} + \frac{1}{945} h_0^6 \frac{\partial^8 h'}{\partial x^6 \partial t^2} = 0 \end{aligned} \quad (2.29)$$

ここで、図-2.2 を参考に水槽内水面振動の初期の波形として、以下のような波形を考える。

$$h' = -a_0 \cos\left(\frac{2\pi}{T}t\right) \sin\left(\frac{\pi}{L}x\right), \quad U_0 = 0 \quad (2.30)$$

ここに、 $a_0$  : 初期振幅、 $T$  : 周期、 $L$  : 水槽の長さである。

式(2.29)に式(2.30)を代入すれば、非回転条件のみを考慮した基礎式の分散関係として次式を得る。また、非回転条件を1回用いる場合（反復しない場合）の分散関係は、式(2.31)の分子最終項を無視した式(2.32)で表される。

$$T'^2 = T^2 \frac{G}{h_0} = \frac{1 + \frac{1}{3}k'^2 - \frac{1}{45}k'^4 + \frac{2}{945}k'^6}{k'^2} \quad (2.31)$$

$$T'^2 = T^2 \frac{G}{h_0} = \frac{1 + \frac{1}{3}k'^2 - \frac{1}{45}k'^4}{k'^2} \quad (2.32)$$

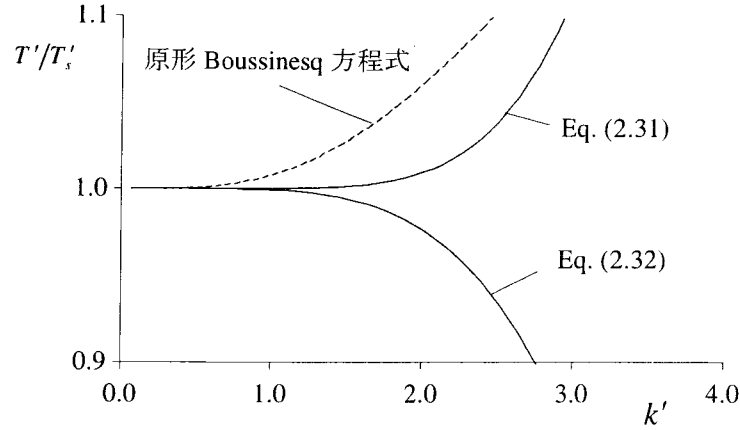


図-2.3 非回転条件のみを考慮した場合の線形分散関係の比較

ここに、 $k'$  : 無次元波数 ( $= \pi h_0/L$ ).

微小振幅波理論についても同様に、水槽内水面振動（重複波）の分散関係を求めると、以下のようになる。

$$T_s'^2 = (2\pi)^2 \frac{1}{k' \tanh k'} \quad (2.33)$$

## (2) 流速分布

流速分布については、水槽内水面振動現象での  $x$  方向流速  $u$  について比較を行う。式(2.16), (2.17) 式を線形化すると、流速分布  $u$  について式(2.34), (2.35)が得られる。

$$u = U_0 + U' + \frac{h_0^2}{2} B \left( \frac{z^2}{h^2} - \frac{1}{3} \right) + \frac{h_0^4}{12} \frac{\partial^2 A}{\partial x^2} \left( \frac{z^2}{h^2} - \frac{1}{3} \right) - \frac{h_0^4}{24} \frac{\partial^2 A}{\partial x^2} \left( \frac{z^4}{h^4} - \frac{1}{5} \right) \quad (2.34)$$

$$A = B = \frac{1}{h_0} \left( \frac{\partial^2 h'}{\partial x \partial t} + U_0 \frac{\partial^2 h'}{\partial x^2} \right) \quad (2.35)$$

線形化した式(2.1), (2.20)と式(2.30)から  $U'$  を求め、 $U'$  及び式(2.30)を式(2.34), (2.35)に代入すると、流速分布の第1修正の線形解が得られる。非回転条件を1回用いた場合の流速分布は、式(2.34)の右辺第4, 5項を無視した次式で表される。

$$u = U_0 + U' + \frac{h_0^2}{2} B \left( \frac{z^2}{h^2} - \frac{1}{3} \right), \quad B = \frac{1}{h_0} \left( \frac{\partial^2 h'}{\partial x \partial t} + U_0 \frac{\partial^2 h'}{\partial x^2} \right) \quad (2.36)$$

微小振幅波理論についても、 $x$  方向の流速分布  $u$  を求めると、次のようになる。

$$u = \frac{Ta_0 G}{2L} \frac{\cosh \frac{\pi}{L}(h+z)}{\cosh \frac{\pi}{L} h} \sin \left( \frac{2\pi}{T} t \right) \cos \left( \frac{\pi}{L} x \right) \quad (2.37)$$

## (3) 解析結果の考察

図-2.3 は  $T'/T_s$  と  $k'$  との関係を示している。 $T'/T_s \leq 1 \pm 0.05$  とすると、適合する無次元波数は、原形 Boussinesq 方程式、非回転条件1回用いた場合、非回転条件を反復した場合について、それぞれ 1.9, 2.4, 2.6 となり、非回転条件を反復することで徐々に適応範囲が広がっている。しか

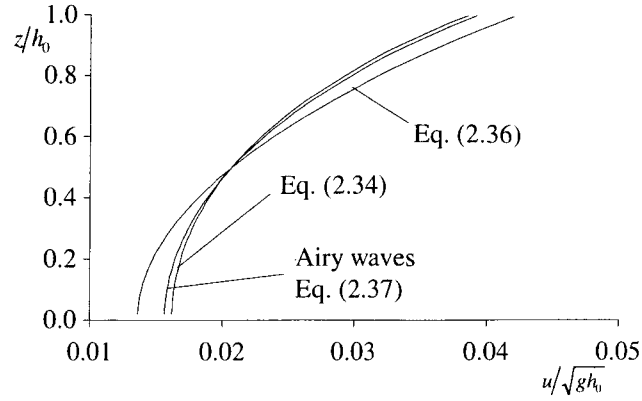
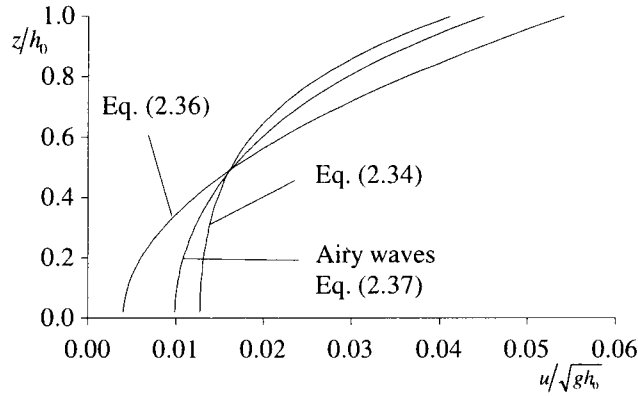
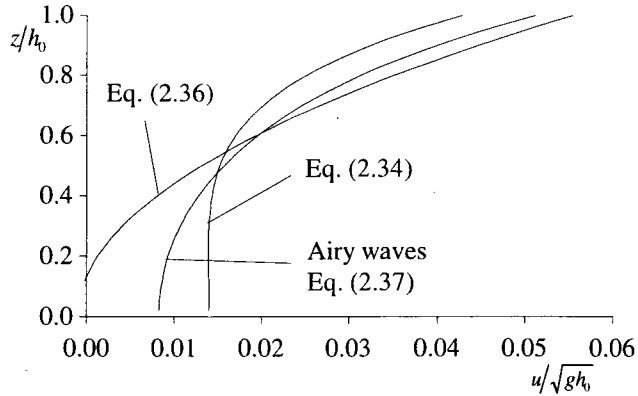

 (a)  $h_0 = 0.05\text{m}$ 

 (b)  $h_0 = 0.07\text{m}$ 

 (c)  $h_0 = 0.08\text{m}$ 

図-2.4 非回転条件のみを考慮した場合の流速分布形の比較

し、式(2.31), (2.32)では、Madsen ら<sup>5)</sup>が指摘するように、singularity が存在するため発散し、高波数領域まで適合するような大きな改善はみられない。非回転条件をさらに反復させたとしても singularity が若干高波数に移動するだけで、分散関係の適応範囲が大幅に増加するとは考えられない。

図-2.4 は、 $h_0 = 0.05\text{m}$ ,  $0.07\text{m}$ ,  $0.08\text{m}$ （無次元波数はそれぞれ 1.57, 2.20, 2.51）について、水槽中央断面  $x = 0$ ,  $t = T/4$  における線形解、式(2.34), (2.36)と微小振幅波理論(2.37)の比較を示した

ものである。なお、流速については $\sqrt{Gh_0}$ で無次元化を行っている。非回転条件1回用いた式(2.36)よりも反復した式(2.34)ほうが微小振幅波理論に適合しており、特に $h_0 = 0.05\text{m}$ での式(2.34)は良好に一致している。しかし、無次元波数が増加するとともに、非回転条件1回の場合の式(2.36)では $h_0 = 0.08\text{m}$ から、反復した場合の式(2.34)では $h_0 = 0.09\text{m}$ から急激にずれ始める。そのときの波数が、線形分散関係において誤差が大きくなる波数にほぼ等しいことから、第1修正だけでは、修正として不十分であると考えられる。そこで、2.3.2で本改良モデルの適用性について検証する。

### 2.3.2 改良モデルの線形解と微小振幅波理論の比較

#### (1) 線形分散関係

前節と同様に、式(2.1)および式(2.23)を線形化すると、 $h'$ に関する次のような線形方程式が得られる。

$$\begin{aligned} & -\frac{\partial^2 h'}{\partial t^2} - 2U_0 \frac{\partial^2 h'}{\partial x \partial t} - (U_0^2 - Gh_0) \frac{\partial^2 h'}{\partial x^2} + \frac{1}{3} h_0^2 U_0^2 \frac{\partial^4 h'}{\partial x^4} + \frac{2}{3} h_0^2 U_0 \frac{\partial^4 h'}{\partial x^3 \partial t} + \frac{1}{3} h_0^2 \left(1 + \frac{2}{7} \xi\right) \frac{\partial^4 h'}{\partial x^2 \partial t^2} \\ & - \frac{2}{21} \xi G h_0^3 \frac{\partial^4 h'}{\partial x^4} + \frac{1}{45} h_0^4 \left(1 - \frac{10}{7} \xi\right) \frac{\partial^6 h'}{\partial x^4 \partial t^2} \\ & + \frac{1}{45} h_0^4 U_0^2 \left(1 - \frac{10}{7} \xi\right) \frac{\partial^6 h'}{\partial x^6} + \frac{2}{45} h_0^4 U_0 \left(1 - \frac{10}{7} \xi\right) \frac{\partial^6 h'}{\partial x^5 \partial t} = 0 \end{aligned} \quad (2.38)$$

式(2.38)に式(2.30)を代入すれば、分散関係として次式を得る。

$$T'^2 = T^2 \frac{G}{h_0} = \frac{1 + \left(1 + \frac{2}{7} \xi\right) \frac{1}{3} k'^2 - \frac{1}{45} \left(1 - \frac{10}{7} \xi\right) k'^4}{k'^2 + \frac{2}{21} \xi k'^4} \quad (2.39)$$

#### (2) 流速分布

流速分布については、前節と同様に $x$ 方向流速 $u$ について比較を行う。式(2.16), (2.17), (2.27)を線形化すると次のようになる。

$$u = U_0 + U' + \frac{h_0^2}{2} B \left( \frac{z^2}{h^2} - \frac{1}{3} \right) + \frac{h_0^4}{12} \frac{\partial^2 A}{\partial x^2} \left( \frac{z^2}{h^2} - \frac{1}{3} \right) - \frac{h_0^4}{24} \frac{\partial^2 A}{\partial x^2} \left( \frac{z^4}{h^4} - \frac{1}{5} \right) \quad (2.40)$$

$$\frac{\partial^2 A}{\partial x^2} = -\frac{45\xi}{h_0^5} \left\{ U_0 \int \frac{\partial h'}{\partial t} dt + h_0 \int \frac{\partial U'}{\partial t} dt + Gh_0 \int \frac{\partial h'}{\partial x} dt - \frac{1}{3} h_0^3 \int \frac{\partial^3 U'}{\partial x^2 \partial t} dt - \frac{1}{3} h_0^2 U_0 \int \frac{\partial^3 h'}{\partial x^2 \partial t} dt \right\} \quad (2.41)$$

$$B = \frac{1}{h_0} \left( \frac{\partial^2 h'}{\partial x \partial t} + U_0 \frac{\partial^2 h'}{\partial x^2} \right) \quad (2.42)$$

式(2.1), (2.23), (2.30)から求めた $U'$ および式(2.30)を式(2.40), (2.41), (2.42)に代入すれば流速分布の線形解を計算することができる。

また、Madsenら<sup>5)</sup>の提案式では明らかにされていない流速分布は、式(2.40)の $A$ を0とし、 $B$ を式(2.28)で表した式(2.43)で評価される。

$$u = U_0 + U' + \frac{h_0^2}{2} B \left( \frac{z^2}{h^2} - \frac{1}{3} \right), \quad B = -\frac{3\eta}{h_0^3} \left\{ U_0 \int \frac{\partial h'}{\partial t} dt + h_0 \int \frac{\partial U'}{\partial t} dt + Gh_0 \int \frac{\partial h'}{\partial x} dt \right\} \quad (2.43)$$

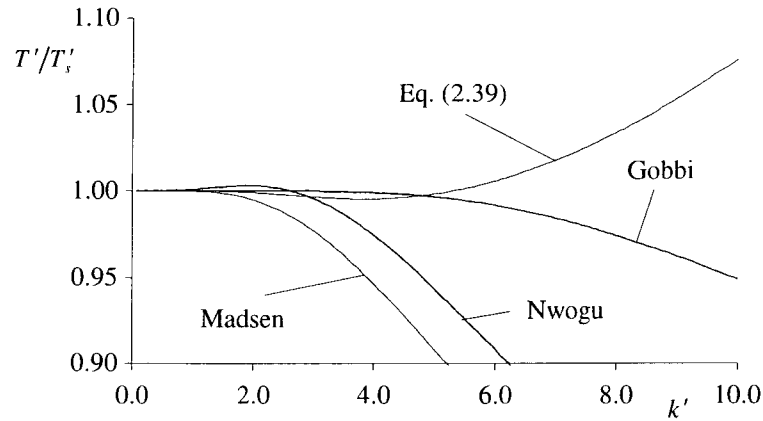


図-2.5 各モデルにおける線形分散関係の比較

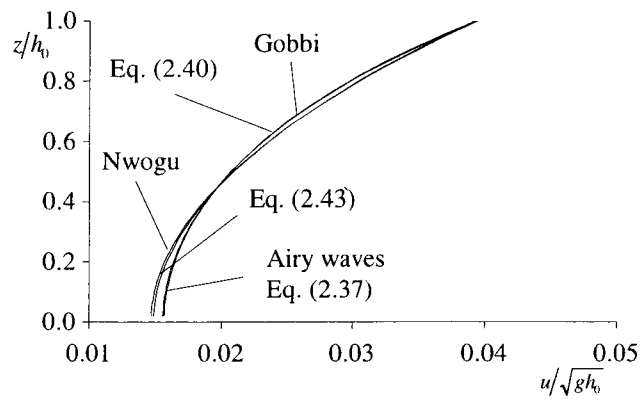
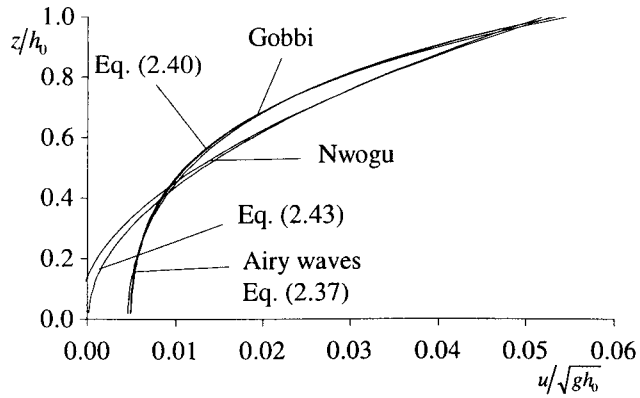

 (a)  $h_0 = 0.05\text{m}$ 

 (b)  $h_0 = 0.1\text{m}$ 

図-2.6 (1) 各モデルにおける流速分布形の比較

### (3) 解析結果の考察

図-2.5 は  $T'/T_s'$  と  $k'$  との関係を示している。微小振幅波理論と高波数領域においても適合するように、式(2.39)中のパラメータ  $\xi$  を同定すると、 $\xi = 0.92$  となる。Madsen ら<sup>5)</sup>、Nwogu<sup>6)</sup>の結果よりも線形分散関係が高波数領域まで適合しており、 $T'/T_s' \leq 1 \pm 0.05$  とすると適合する無次元波数

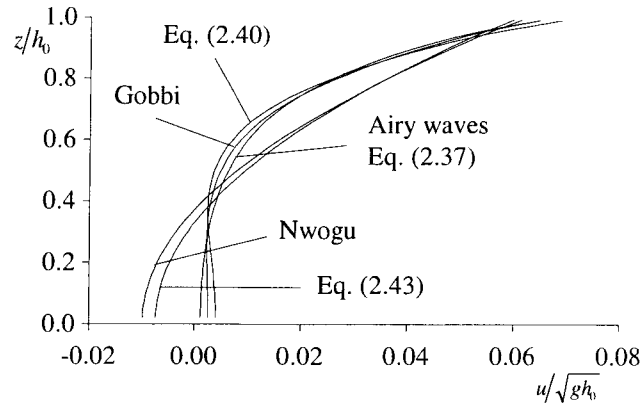
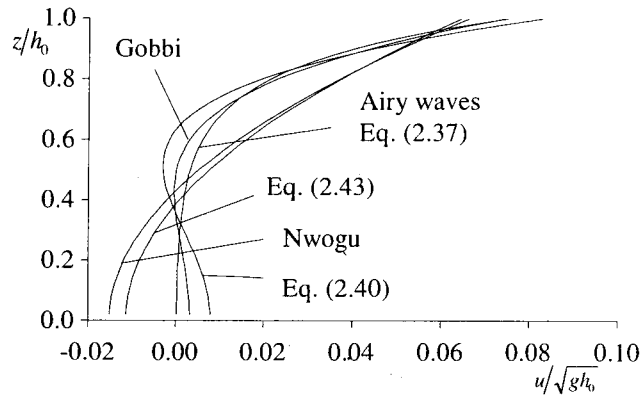

 (c)  $h_0 = 0.15\text{m}$ 

 (d)  $h_0 = 0.2\text{m}$ 

図-2.6 (2) 各モデルにおける流速分布形の比較

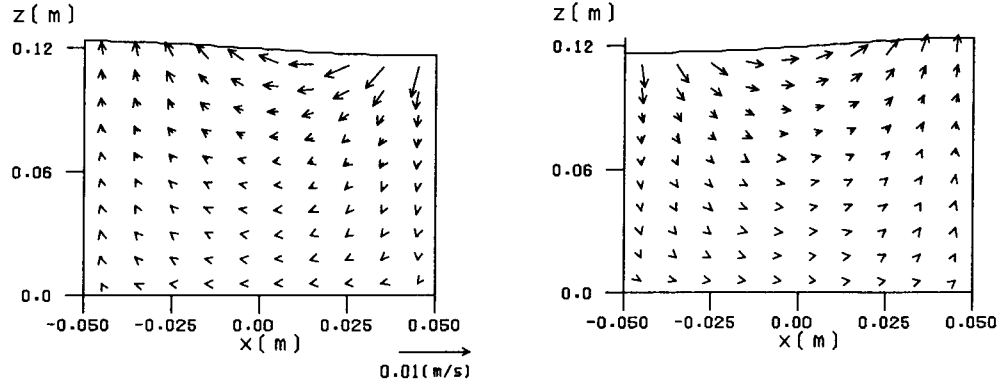
がほぼ 9 まで増加している。Gobbi ら<sup>10)</sup>の提案式に比べると、若干適応範囲が狭いものの、本改良モデルは、任意の高さの流速をパラメータとしたモデル<sup>6)・10)</sup>より流速分布、基礎式を水深平均流速で簡易に表すことができると考えられる。また、水槽内水面振動のようにポテンシャル流として扱われる解析では、非回転条件の反復を増やすことで、線形分散関係がより高波数領域まで適合すると思われる。

図-2.6 は、 $h_0 = 0.05\text{m}$ ,  $0.10\text{m}$ ,  $0.15\text{m}$ ,  $0.20\text{m}$  (無次元波数はそれぞれ 1.57, 3.14, 4.71, 6.28) について、水槽中央断面  $x = 0$ ,  $t = T/4$  における水平方向流速分布の比較を示している。図をみると、 $h_0 = 0.15\text{m}$  までは良好に一致しているが、無次元波数の増加に伴って微小振幅波理論とのずれが大きくなっている。これは、非回転条件を反復することで導かれる高次の項の影響により、流速分布式(2.40)が水域中に極値を持つためであると考えられる。極値は無次元波数の増加とともに、水域上方へ持ち上げられ、極値から底面に向かって分布形が逆勾配となり、またその勾配が急になることで極値・底面付近でのずれが大きくなっている。Gobbi ら<sup>10)</sup>のモデルにおいても極値を持つことが指摘されており、極値を持つ限界無次元波数と求めると、本モデルでは  $k' \approx 3.86$ 、Gobbi らのモデルでは 4.24 と若干高い。前述のように非回転条件の反復を増やし、線形分散関係が高波数領域まで一致すれば、流速分布についてもより高波数まで適合すると推測される。



表-2.1 数値解析の水理量

	数値解析法	初期振幅 $a_0/h_0$
RunA03	移動一般座標系	0.03
RunA20-B	移動一般座標系	0.2
RunA20-V	VOF	0.2
RunA30-B	移動一般座標系	0.3
RunA30-V	VOF	0.3



(a) 初期波形と同位相

(b) 初期波形と逆位相

 図-2.7 初期振幅が小さい場合の水面変動の計算結果 (RunA03,  $h_0 = 0.12\text{m}$ )

## 2.4 矩形水槽内水面振動の鉛直2次元数値解析

次に非線形性が強い領域でのモデルの適用性を検討するために、数値解析を行い、非線形解析と比較するデータとする。

### 2.4.1 数値解析法

#### (1) 基礎式

鉛直2次元水面振動の数値計算に関して、時間的に変動する水面に適合した移動一般座標系を用いる方法を考える。

流速ベクトルの反変成分  $V^i$  を未知数として基礎式を記述すると、移動一般座標系での連続式、運動方程式は以下ようになる。なお、水槽内水面振動はポテンシャル流として扱われるので、粘性項は無視している。

[連続式]

$$\frac{1}{\sqrt{J}} \frac{\partial V^\alpha \sqrt{J}}{\partial \zeta^\alpha} = 0 \quad (2.44)$$

[運動方程式]

$$\frac{\partial V^i}{\partial t} + \nabla_j [V^i (V^j - W^j)] + V^i \nabla_j W^j + V^j \nabla_j W^i = F^i - \frac{1}{\rho} g^ij \nabla_j p \quad (2.45)$$

ここに、 $\zeta$ : 計算空間での空間座標、 $\nabla$ : 共変微分、 $V^i$ : 流速ベクトルの反変成分、 $W^i$ : 計算格

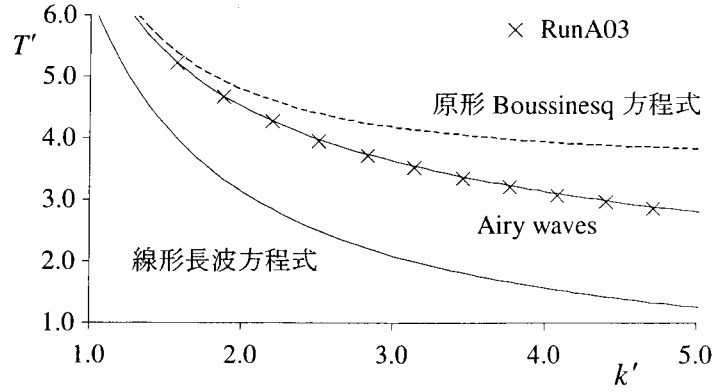
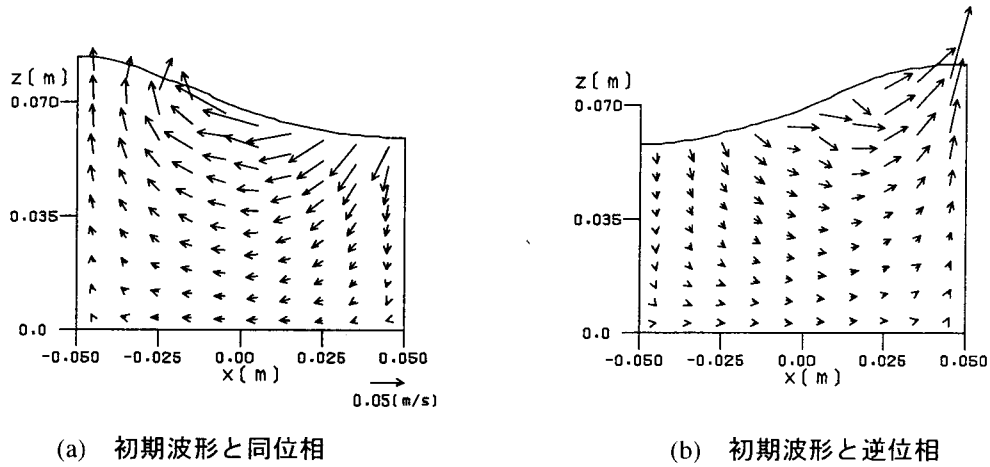


図-2.8 計算結果と微小振幅波理論の比較


 図-2.9 初期振幅が比較的大きい場合の計算結果 (RunA20,  $h_0 = 0.07\text{m}$ )

子移動速度ベクトルの反変成分,  $p$ : 圧力,  $\rho$ : 水の密度,  $F^i$ : 外力,  $g^{ij}$ : 基本反変テンソル,  $J$ : 基本反変テンソルからなる行列の行列式.

## (2) 計算法の概要

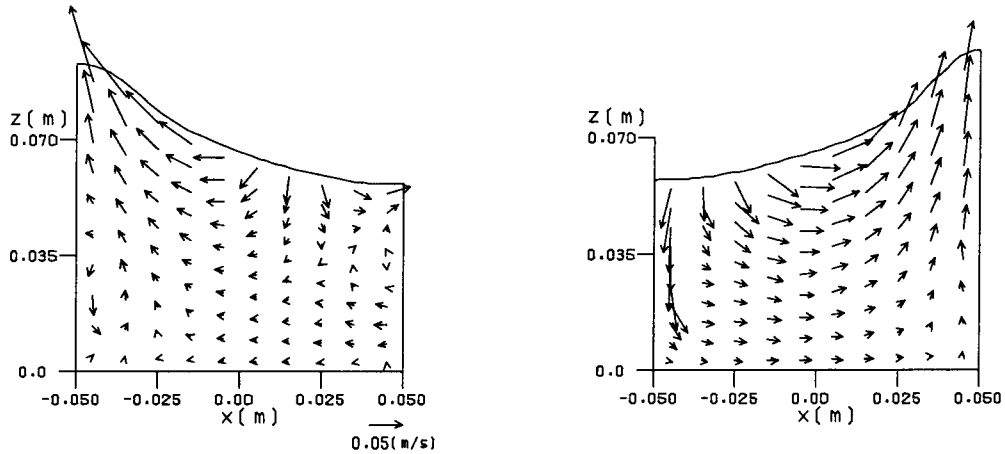
変数の配置には, スタッガードスキームを用いて配置し, 基礎式の離散化として, 有限体積法を用いる. また移流項の離散化には TVD-MUSCL<sup>16)</sup>を適用する.

水槽内水面振動の数値解析に際し, 初期の波形に式(2.30)と同様な正弦波を与える.

$$h = h_0 - a_0 \cos\left(\frac{2\pi}{T}t\right) \sin\left(\frac{\pi}{L}x\right) \quad (2.46)$$

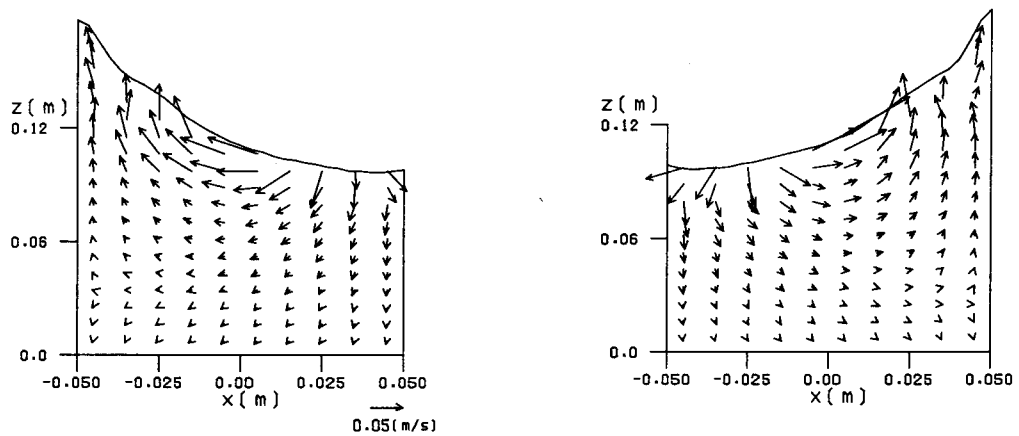
ここに,  $a_0/h_0$ : 無次元振幅

$L = 0.1\text{m}$ に固定し, 平均水深を  $h_0 = 0.05\text{m}$ から  $0.15\text{m}$ まで  $0.01\text{m}$ ごとに増加させて数値計算を行う. なお, 初期水面の振幅については, 表-2.1 に示すように小さい場合, 比較的大きい場合, 大きい場合としてそれぞれ  $a_0/h_0 = 0.03, 0.2, 0.3$  とする. 水面の変動がほぼ安定するまで計算を繰り返し, そのときの振幅, 周期を求める. また, 水深を大きくしていくと, 水面の変動によっては移動一般座標系で計算できない場合があるため,  $h_0 = 0.1\text{m}$ からはデカルト座標系での基礎式を用



(a) 初期波形と同位相

(b) 初期波形と逆位相

 図-2.10 初期振幅が大きく初期水深が小さい場合の計算結果 (RunA30,  $h_0 = 0.07\text{m}$ )


(a) 初期波形と同位相

(b) 初期波形と逆位相

 図-2.11 初期振幅が大きく初期水深が大きい場合の計算結果 (RunA30,  $h_0 = 0.12\text{m}$ )

いた VOF 法により解析を行っている。VOF 法においても変数の配置，基礎式の離散化，計算条件などは同じである。

計算法の詳細については，第6章に記述する。

#### 2.4.2 初期振幅が小さい場合の数値解析結果の考察

鉛直2次元数値解析による計算例として，初期振幅が小さい場合(RunA03)の  $h_0 = 0.12\text{m}$  における流況の時間的変化を示したものが図-2.7である。(a)，(b)はそれぞれ初期波形とほぼ同位相，あるいは逆位相での計算結果である。周期的に水面の変動している様子が再現されている。また，初期振幅が小さい場合の数値解析結果を用いて分散関係を示したのが図-2.8であり，微小振幅波理論とほぼ一致している。

#### 2.4.3 初期振幅が大きい場合の数値解析結果の考察

初期振幅が比較的大きい場合(RunA20)の計算例として， $h_0 = 0.07\text{m}$ の流況の時間変化を図-2.9に示す。また，初期振幅が大きい場合(RunA30)の  $h_0 = 0.07\text{m}$ ， $0.12\text{m}$ での流況の時間的変化を図

表-2.2 計算結果（定常振幅と周期）

Case	初期水深 $h_0$ (m)	定常振幅 ( $h_1/h_0$ )	周期 (s)	Case	平均水深 $h_0$ (m)	定常振幅 ( $h_1/h_0$ )	周期 (s)
RunA20-B05	0.05	0.190	0.375	RunA30-B05	0.05	0.277	0.381
RunA20-B06	0.06	0.189	0.371	RunA30-B06	0.06	0.266	0.379
RunA20-B07	0.07	0.178	0.370	RunA30-B07	0.07	0.251	0.374
RunA20-B08	0.08	0.172	0.370	RunA30-B08	0.08	0.243	0.376
RunA20-B09	0.09	0.172	0.373	RunA30-B09	0.09	0.234	0.379
RunA20-V10	0.10	0.305	0.403	RunA30-V10	0.10	0.364	0.412
RunA20-V11	0.11	0.318	0.410	RunA30-V11	0.11	0.371	0.417
RunA20-V12	0.12	0.329	0.411	RunA30-V12	0.12	0.370	0.423
RunA20-V13	0.13	0.323	0.416	RunA30-V13	0.13	0.356	0.419
RunA20-V14	0.14	0.318	0.419	RunA30-V14	0.14	0.372	0.436
RunA20-V15	0.15	0.320	0.419	RunA30-V15	0.15	0.328	0.429

-2.10, 2.11 に示す。  $h_0 = 0.07\text{m}$  は移動一般座標系を用いた計算結果であり、  $0.12\text{m}$  は VOF 法による計算結果である。図-2.9-2.11 の流況、特に流速ベクトルにおいて、対称になっていない場合がある。初期振幅が大きいケースでは、非線形性が強く、水面がひずみながら水面振動しているため、非対称となり得るのではないかとと思われる。

初期振幅の大きさによる水面形状の違いを比較してみると、初期振幅が大きいほうが非線形性によって水面のひずみが大きい。また、VOF 法による解析は移動一般座標系とは異なり、水面形状をなだらかに表現できないが、RunA30 の場合には両ケースとも水面のひずみが確認される。表-2.2 は RunA20, RunA30 での計算結果から定常振幅、周期について整理したものである。定常振幅と初期振幅の値を比較してみると、移動一般座標系での定常振幅は初期振幅よりも若干減衰しており、VOF 法による結果は大きくなっていることが分かる。移動一般座標系を用いた解析では、水面を計算する際に流速ベクトルの内挿が必要となるため、振幅が若干減衰すると考えられる。また、水槽内水面振動現象では、同じ初期振幅を与えても水深の増大により  $a_0/L$  が大きくなり、水面がオーバーハングするような急激な変形を伴って定常状態になるため、VOF 法での結果は初期振幅に比べ振幅が大きくなるとと思われる。急激な波形の変形により波形勾配が急になることで、移動一般座標系での解析が困難なことも説明される。

## 2.5 非線形解析結果と数値計算結果の比較

### 2.5.1 1次モードによる分散関係

非線形解析として、まず水深  $h$ 、平均流速  $U$  を式(2.47)、(2.48)のように1次モードで表す。初

期の波形は、線形解析の場合と同様であり、平均流速については図-2.2 の境界条件を満たすように定める。

$$h = h_0 - h_1 \sin\left(\frac{\pi}{L}x\right) \cos\left(\frac{2\pi}{T}t\right) \quad (2.47)$$

$$U = U_1 \cos\left(\frac{\pi}{L}x\right) \sin\left(\frac{2\pi}{T}t + \phi_{UT1}\right) \quad (2.48)$$

ここに、 $h_1$ ,  $U_1$  はそれぞれ水面、平均流速の振動振幅を表し、 $\phi_{UT1}$  は位相差である ( $0 \leq \phi_{UT1} \leq 2\pi$ )。

式(2.47), (2.48)を 式(2.1), (2.23)に代入し、時間・空間モード毎に整理する。例えば、連続式(2.1)を整理すると、

$$\begin{aligned} & \left( h_1 \frac{2\pi}{T} - h_0 U_1 \frac{\pi}{L} \cos \phi_{UT1} \right) \sin\left(\frac{\pi}{L}x\right) \sin\left(\frac{2\pi}{T}t\right) \\ & + h_0 U_1 \sin \phi_{UT1} \sin\left(\frac{\pi}{L}x\right) \cos\left(\frac{2\pi}{T}t\right) = 0 \end{aligned}$$

のようになり、それぞれのモードの係数を0にすることで、式(2.49), (2.50)が得られる。

$$\sin\left(\frac{\pi}{L}x\right) \sin\left(\frac{2\pi}{T}t\right);$$

$$h_1 \frac{2\pi}{T} - h_0 U_1 \frac{\pi}{L} \cos \phi_{UT1} = 0 \quad (2.49)$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{L}x\right) \cos\left(\frac{2\pi}{T}t\right);$$

$$h_0 U_1 \sin \phi_{UT1} = 0 \quad (2.50)$$

同様に、運動量方程式(2.23)においても、以下のモードの係数を0とすると式(2.51), (2.52)が導かれる。なお、前述のように式(2.23)の鉛直加速度項については、非定常項のみを考慮する。

$$\cos\left(\frac{\pi}{L}x\right) \sin\left(\frac{2\pi}{T}t\right);$$

$$\begin{aligned} & -h_0 U_1 \frac{2\pi}{T} \sin \phi_{UT1} - \frac{1}{16} h_1 U_1^2 \frac{\pi}{L} \sin 2\phi_{UT1} \\ & - \frac{1}{3} h_0 U_1 \left(\frac{\pi}{L}\right)^2 \frac{2\pi}{T} \left(1 + \frac{2}{7}\xi\right) \sin \phi_{UT1} \left\{ h_0^2 + \frac{1}{16} h_1^2 \right\} \\ & - \frac{1}{3} h_0 h_1^2 U_1 \left(\frac{\pi}{L}\right)^2 \frac{2\pi}{T} \left(1 + \frac{2}{7}\xi\right) \sin \phi_{UT1} \\ & + \frac{1}{45} h_0 U_1 \left(1 - \frac{10}{7}\xi\right) \left(\frac{\pi}{L}\right)^4 \frac{2\pi}{T} \sin \phi_{UT1} \left\{ h_0^4 + \frac{67}{8} h_0^2 h_1^2 + \frac{129}{64} h_1^4 \right\} = 0 \end{aligned} \quad (2.51)$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{L}x\right) \cos\left(\frac{2\pi}{T}t\right);$$

$$h_0 U_1 \frac{2\pi}{T} \cos \phi_{UT1} - \frac{1}{8} h_1 U_1^2 \frac{\pi}{L} + \frac{1}{16} h_1 U_1^2 \frac{\pi}{L} \cos 2\phi_{UT1} - G h_0 h_1 \frac{\pi}{L}$$

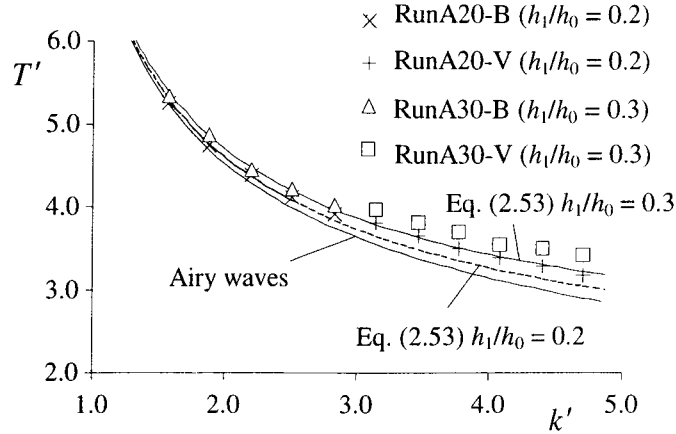


図-2.12 非線形解析結果と計算結果の比較

$$\begin{aligned}
 & + \frac{1}{3} h_0 U_1 \left( \frac{\pi}{L} \right)^2 \frac{2\pi}{T} \left( 1 + \frac{2}{7} \xi \right) \cos \phi_{UT1} \left\{ h_0^2 + \frac{3}{16} h_1^2 \right\} + \frac{1}{3} h_0 h_1^2 U_1 \left( \frac{\pi}{L} \right)^2 \frac{2\pi}{T} \left( 1 + \frac{2}{7} \xi \right) \cos \phi_{UT1} \\
 & - \frac{2}{21} \xi G h_0^3 h_1 \left( \frac{\pi}{L} \right)^3 - \frac{3}{56} \xi G h_0 h_1^3 \left( \frac{\pi}{L} \right)^3 \\
 & - \frac{1}{45} h_0 U_1 \left( 1 - \frac{10}{7} \xi \right) \left( \frac{\pi}{L} \right)^4 \frac{2\pi}{T} \cos \phi_{UT1} \left\{ h_0^4 + \frac{73}{8} h_0^2 h_1^2 + \frac{261}{64} h_1^4 \right\} = 0
 \end{aligned} \quad (2.52)$$

式(2.47), (2.48)の振幅, 位相差に関する連立方程式(2.49)–(2.52)を解くことで, 非線形領域における水面振動の近似解が計算できる. 式(2.50)より  $\sin \phi_{UT1} = 0$  なので, 式(2.51)は自動的に満足される. また,  $\phi_{UT1} = 0$ ,  $\pi$ が考えられるが, 式(2.49), (2.50)を用いて式(2.52)から  $\sin \phi_{UT1}$ ,  $U_1$ を消去し,  $h_1^2$ ,  $U_1^2$ 以上の項を無視して得られる分散関係が線形分散関係と一致するように  $\phi_{UT1}$ を求めると,  $\phi_{UT1} = 0$ となる. したがって, 式(2.52)から  $\phi_{UT1}$ ,  $U_1$ を消去し整理すると, 非線形領域における分散関係は次のように求められる.

$$\begin{aligned}
 & \left\{ k'^2 + \frac{2}{21} \xi k'^4 + \frac{3}{56} \xi \left( \frac{h_1}{h_0} \right)^2 k'^4 \right\} T'^2 \\
 & = 1 + \frac{1}{3} \left( 1 + \frac{2}{7} \xi \right) k'^2 - \frac{1}{45} \left( 1 - \frac{10}{7} \xi \right) k'^4 - \frac{1}{16} \left( \frac{h_1}{h_0} \right)^2 + \frac{19}{48} \left( 1 + \frac{2}{7} \xi \right) \left( \frac{h_1}{h_0} \right)^2 k'^2 \\
 & - \frac{73}{360} \left( 1 - \frac{10}{7} \xi \right) \left( \frac{h_1}{h_0} \right)^2 k'^4 - \frac{261}{2880} \left( 1 - \frac{10}{7} \xi \right) \left( \frac{h_1}{h_0} \right)^4 k'^4
 \end{aligned} \quad (2.53)$$

解析結果と数値計算結果を比較する際, 分散関係の非線形解は, 式(2.53)中の振幅  $h_1/h_0$  に計算結果の値を代入することで求められる. しかし, 前述のように, 初期振幅が大きい場合には, 定常振動での振幅の値が初期振幅と異なるケースがあるため, 振幅  $h_1/h_0$  を 0.2, 0.3 に固定し, 比較することを試みる. そこで, 振幅の小さい RunA03 と大きい RunA20, RunA30 から得られる周期, 定常状態での振幅の値を補間することで, 振幅  $h_1/h_0 = 0.2, 0.3$  での周期を求め, これを数値計算結果としてプロットする. 近似解式(2.53)については  $h_1/h_0 = 0.2, 0.3$  を代入し, 計算する. 図-2.12 は非線形領域における分散関係を示している. 修正式の近似解が数値解析結果に対しほぼ一致し

ていることから非線形性が強い領域においても適用できると考えられる。

### 2.5.2 2 次モードを加えた非線形解析

振幅が大きい非線形領域においては、図-2.10, 2.11 より水面のひずみが確認できる。しかし、水面を 1 次モードまでで表した式(2.47)では、水面のひずみを表現できない。そこで、式(2.47), (2.48) に 2 次モードを加え、水面変動の時間発展について近似解を求め、計算結果との比較を試みる。その際、2 次モードまで考慮することで非線形領域における分散関係式(2.53)も求め直す必要があるが、ここでは 1 次モードまでの分散関係で表せると仮定し、フィードバックは考えない。従って、1 次の係数  $h_1$ ,  $U_1$ ,  $\phi_{UT1}$  については式(2.49), (2.50)から得られる次の関係を用いる。

$$h_1 \frac{2\pi}{T} - h_0 U_1 \frac{\pi}{L} = 0, \quad \phi_{UT1} = 0 \quad (2.54)$$

式(2.1), (2.23)に

$$h = h_0 - h_1 \sin\left(\frac{\pi}{L}x\right) \cos\left(\frac{2\pi}{T}t\right) + h_2 \cos\left(\frac{2\pi}{L}x\right) \cos\left(\frac{4\pi}{T}t + \phi_{hT2}\right) \quad (2.55)$$

$$U = U_1 \cos\left(\frac{\pi}{L}x\right) \sin\left(\frac{2\pi}{T}t\right) + U_2 \sin\left(\frac{2\pi}{L}x\right) \sin\left(\frac{4\pi}{T}t + \phi_{UT2}\right) \quad (2.56)$$

を代入し、時間・空間の 2 次モードの係数を 0 にすると、以下のようになる。なお、2 次モードの積については微小と仮定し、無視する。

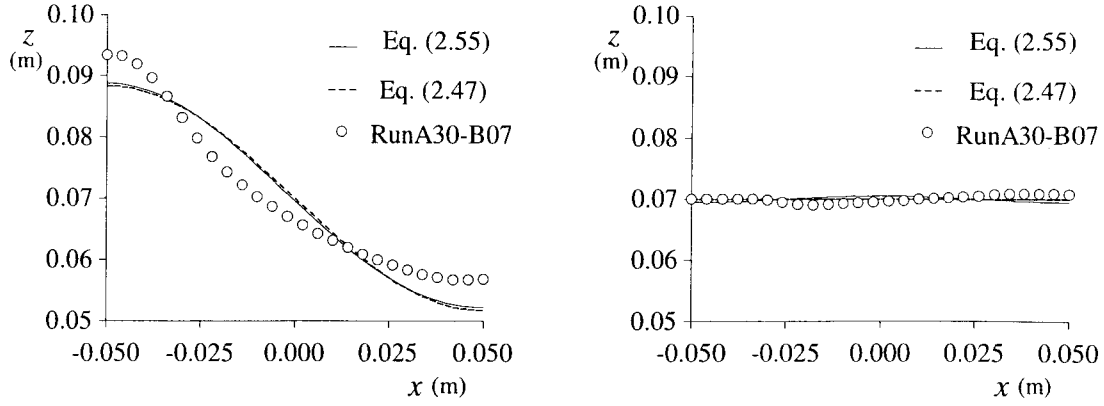
式(2.1)から

$$\begin{aligned} & \cos\left(\frac{2\pi}{L}x\right) \sin\left(\frac{4\pi}{T}t\right); \\ & -h_2 \frac{4\pi}{T} \cos \phi_{hT2} - \frac{1}{2} h_1 U_1 \frac{\pi}{L} + h_0 U_2 \frac{2\pi}{L} \cos \phi_{UT2} = 0 \end{aligned} \quad (2.57)$$

$$\begin{aligned} & \cos\left(\frac{2\pi}{L}x\right) \cos\left(\frac{4\pi}{T}t\right); \\ & -h_2 \frac{4\pi}{T} \sin \phi_{hT2} + h_0 U_2 \frac{2\pi}{L} \sin \phi_{UT2} = 0 \end{aligned} \quad (2.58)$$

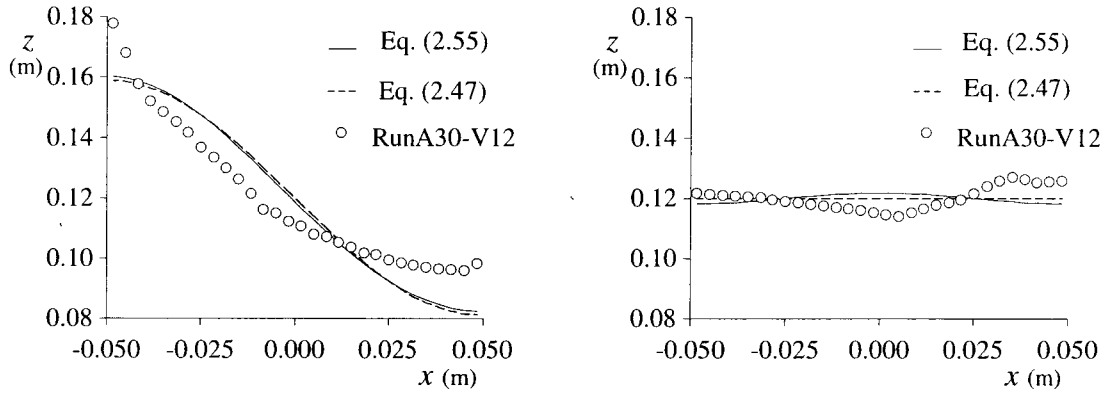
また、式(2.23)から

$$\begin{aligned} & \sin\left(\frac{2\pi}{L}x\right) \sin\left(\frac{4\pi}{T}t\right); \\ & -h_0 U_2 \frac{4\pi}{T} \sin \phi_{UT2} + \frac{1}{4} h_2 U_1^2 \frac{2\pi}{L} \sin \phi_{hT2} + G \frac{\pi}{L} 2h_0 h_2 \sin \phi_{hT2} \\ & - \frac{1}{3} \left(1 + \frac{2}{7} \xi\right) \frac{2\pi}{T} \left(\frac{\pi}{L}\right)^2 \left(8h_0^3 U_2 \sin \phi_{UT2} + 7h_0 h_1^2 U_2 \sin \phi_{UT2} + 2h_0 h_1 h_2 U_1 \sin \phi_{hT2}\right) \\ & - \frac{2}{21} \xi G \left(\frac{\pi}{L}\right)^3 \left\{ -8h_2 \left(h_0^3 + \frac{3}{4} h_0 h_1^2\right) \sin \phi_{hT2} \right\} \\ & - \frac{1}{45} \left(1 - \frac{10}{7} \xi\right) \frac{2\pi}{T} \left(\frac{\pi}{L}\right)^4 \left( -40h_0^3 h_1 h_2 U_1 \sin \phi_{hT2} - \frac{1788}{64} h_0 h_1^3 h_2 U_1 \sin \phi_{hT2} - 32h_0^5 U_2 \sin \phi_{UT2} \right) \end{aligned}$$



(a) 初期波形と同位相

 (b) 初期波形と位相差  $\pi/2$ 

 図-2.13 水面変動の時間発展 ( $h_0 = 0.07\text{m}$ )


(a) 初期波形と同位相

 (b) 初期波形と位相差  $\pi/2$ 

 図-2.14 水面変動の時間発展 ( $h_0 = 0.12\text{m}$ )

$$\left. -130h_0^3h_1^2U_2 \sin \phi_{UT2} - \frac{2895}{65}h_0h_1^4U_2 \sin \phi_{UT2} \right) = 0 \quad (2.59)$$

$$\sin\left(\frac{2\pi}{L}x\right)\cos\left(\frac{4\pi}{T}t\right);$$

$$\begin{aligned} & h_0U_2 \frac{4\pi}{T} \cos \phi_{UT2} - \frac{1}{4}h_1U_1 \frac{4\pi}{T} + \frac{1}{4}h_0U_1^2 \frac{2\pi}{L} - \frac{1}{4}h_2U_1^2 \frac{2\pi}{L} \cos \phi_{HT2} \\ & + G \frac{\pi}{L} \left( -2h_0h_2 \cos \phi_{HT2} + \frac{1}{4}h_1^2 \right) \\ & - \frac{1}{3} \left( 1 + \frac{2}{7}\xi \right) \frac{2\pi}{T} \left( \frac{\pi}{L} \right)^2 \left\{ \frac{5}{2}h_0^2h_1U_1 + \frac{1}{2}h_1^3U_1 - h_0U_2(8h_0^2 + 7h_1^2) \cos \phi_{UT2} - 2h_0h_1h_2U_1 \cos \phi_{HT2} \right\} \\ & - \frac{2}{21}\xi G \left( \frac{\pi}{L} \right)^3 \left\{ -\frac{3}{4}h_0^2h_1^2 - \frac{1}{8}h_1^4 + 8h_0h_2 \left( h_0^2 + \frac{3}{4}h_1^2 \right) \cos \phi_{HT2} \right\} \\ & - \frac{1}{45} \left( 1 - \frac{10}{7}\xi \right) \frac{2\pi}{T} \left( \frac{\pi}{L} \right)^4 \left\{ -9h_0^4h_1U_1 - \frac{25}{2}h_0^2h_1^3U_1 - \frac{32}{35}h_1^5U_1 + 40h_0^3h_1h_2U_1 \cos \phi_{HT2} \right. \\ & \left. + \frac{1500}{64}h_0h_1^3h_2U_1 \cos \phi_{HT2} + 32h_0^5U_2 \cos \phi_{UT2} \right\} \end{aligned}$$



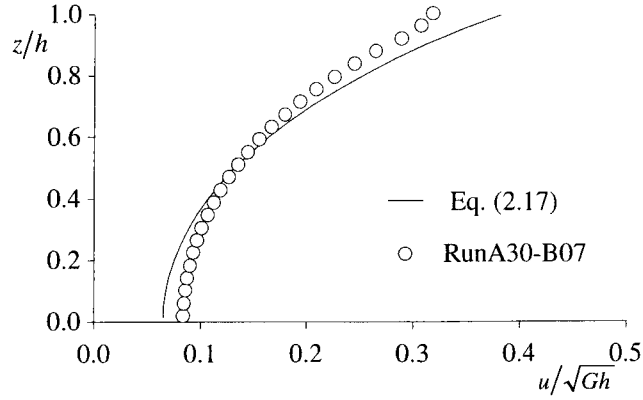
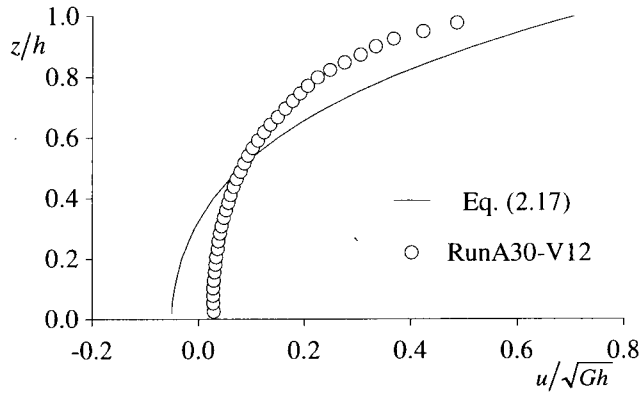

 (a)  $h_0 = 0.07\text{m}$ 

 (b)  $h_0 = 0.12\text{m}$ 

図-2.15 非線形領域における水平方向流速分布の比較

$$+130h_0^3h_1^2U_2 \cos \phi_{UT2} + \frac{3465}{65}h_0h_1^4U_2 \cos \phi_{UT2} \Big) = 0 \quad (2.60)$$

式(2.58), (2.59)から  $h_2 \sin \phi_{hT2} = U_2 \sin \phi_{UT2} = 0$  となる. 式(2.57), (2.60)に式(2.54)を代入し,  $U_1$  を消去すると,  $h_2 \cos \phi_{hT2}$ ,  $U_2 \cos \phi_{UT2}$  に関する連立方程式が得られ, これらを解くことにより  $h_2 \cos \phi_{hT2}$  が求められる. 得られた  $h_2 \sin \phi_{hT2}$ ,  $h_2 \cos \phi_{hT2}$  を式(2.55)に代入すると, ひずみを考慮した水面変動の時間発展について近似解を計算することができる. 但し計算結果と比較する際, 式(2.55)中の振幅  $h_1/h_0$  については, 計算結果から得られた表-2.2 の値を用いている.

次に, 非線形領域における流速・圧力分布の近似解を求め, 計算結果との比較を行う.  $h$ ,  $U$  の1次, 2次の係数, 位相差については上記の過程で全て求められており, 式(2.55), (2.56)を式(2.16), (2.17), (2.18), (2.19)に代入すれば流速分布・圧力分布の非線形解が計算できる.

図-2.13, 2.14 は  $h_0 = 0.07, 0.12\text{m}$  における水面変動について数値解析結果と非線形解析式(2.55)を比較したものであり, (a), (b)はそれぞれ初期波形とほぼ同位相, 位相差  $\pi/2$  での結果である. また, 図には式(2.55)において  $h_2 = 0$  とした1次モードによる非線形解, 即ち式(2.47)も併せて示している. 図をみると, 特に同位相の場合において計算結果との適合性が十分ではなく, モードの違いによる非線形解の差はほとんど見られない. この理由として, 初期振幅が大きい場合には, 前述のように水面のひずみが大きく, 波形勾配が急激になるため, 基礎式の誘導する際に水深変

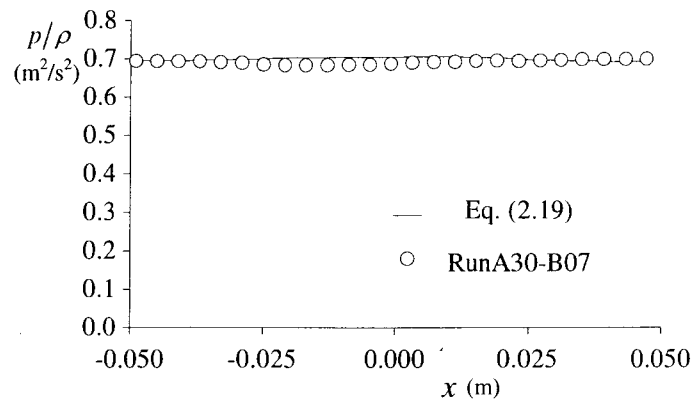
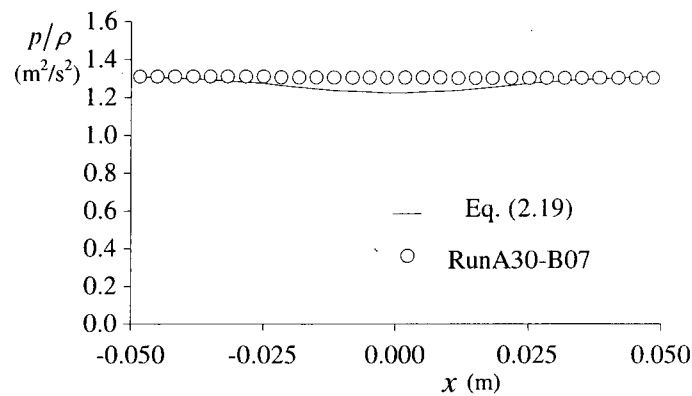

 (a)  $h_0 = 0.07\text{m}$ 

 (b)  $h_0 = 0.12\text{m}$ 

図-2.16 非線形領域における底面での圧力分布の比較

化の影響を無視したことが考えられる。この点については、今後検討したい。しかし、2次モードまでを考慮することで、ごく僅かではあるが、壁面付近で水面が跳ね上がり、またそれに伴ってくびれも大きくなる特徴が確認できる。

図-2.15 は初期波形と位相差 $\pi/2$ における水槽中央断面 ( $x = 0$ ) の水平方向流速について、非線形解式(2.17)と数値計算結果の比較を表したものであり、図-2.16 は底面での圧力分布を比較したものである。 $h_0 = 0.07\text{m}$  の場合には、ほぼ一致しているが、 $0.12\text{m}$  については底面付近で流速分布が、水槽中央断面で圧力分布が十分に再現できていない。前述のように、振幅が大きい非線形領域では、水深勾配の効果が影響するのではないかと考えられる。

## 2.6 結語

本章では、基礎式、流速分布を河川流などの基本量である平均流速で陽的かつ簡易に表すことに着目し、鉛直加速度を考慮した水深積分モデル（原形 Boussinesq 方程式）の改良について検討したものである。得られた結論をまとめると以下のようなになる。

- (1) 非回転条件に適合する流速分布形を求める方法と Madsen & Schaffer<sup>5)</sup>がポテンシャル流れに対して用いた線形分散関係の singularity を解消する分散項の修正法を適用して、鉛直加速度を考慮した水深積分モデルの改良を行った。さらに、時間積分を用いて分散項の修正を流速分布形に反映させ、平均流速で表記した流速分布形を誘導した。また、誘導過程を考察することで、Madsen ら<sup>3)</sup>のモデルの簡易な解釈を示した。
- (2) 導かれた基礎式を水槽内水面振動現象に適用した。微小振幅波理論と本モデルによる線形解析の比較を行い、従来のモデルより高波数領域まで適合することを示した。
- (3) 水深、平均流速を1次モードで表し、非線形領域における分散関係を求めた。鉛直2次元数値計算結果とほぼ一致していることから非線形領域においても適用できることが分かった。
- (4) さらに水深、平均流速に関して2次モードまでを考慮し、水面変動の時間発展、水平方向流速分布、底面での圧力分布の近似解を求めた。2次モードを考慮することにより、水面形状については若干計算結果の特徴を捉えることができた。流速分布、圧力分布については高波数になると十分に再現することができなかった。

今後、平均流速の影響を無視できない場合について、分散項の修正を流速分布に反映させる方法を考察するとともに、水深勾配の効果についても検討したい。

## 参考文献

- 1) 灘岡和夫：波動方程式－理論と数値シミュレーション－，水工学に関する夏季研修会講義集 B コース，pp.B-2-1-B-2-19，1999.
- 2) Iwasa, Y. : Analytical Considerations on Cnoidal and Solitary Waves, Memorirs fo the Faculty Engineering, Kyoto University, Vol.17, No. 4, pp.264-276, 1991.
- 3) 細田尚, 多田彰秀: 鉛直加速度を考慮した基礎式系による開水路流れの定在波の水面形解析, 水工学論文集, 第 38 巻, pp.457-462, 1994.
- 4) 細田 尚, 加藤隆彰: 水深積分モデルによる砂堆の発生・発達過程の数値シミュレーション, 水工学論文集, 第 44 巻, pp. 617-622, 2000.
- 5) Madsen, P.A., Murry, R. and Soresen, O.R: A new form of Boussinesq equations with improved linear dispersion characteristics, Coastal Eng., Vol.15, pp.374-388, 1991.
- 6) Nwogu, O. : Alternative form of Boussinesq equations for nearshore wave propagation, J. Water, Port, Coastal, and Ocean Eng., ASCE, Vol.119, No.6, pp.618-638, 1993.
- 7) Madsen, P.A. and Schaffer, H.A. : High order Boussinesq-type equations for surface gravity waves-derivation and analysis, Phil. Trans. R. Soc. Lond., A356, pp.79-83, 1998.
- 8) Madsen, P.A., Bingham, H. and Liu, H. : The ultimate Boussinesq formulation for highly dispersive

- and highly nonlinear water waves, Proc. Coastal Eng., pp.176-189, 2000.
- 9) Agnon, Y., Madsen, P.A. and Schaffer, H.A. : A new approach to high-order Boussinesq model, J. Fluid Mech., Vol.399, pp319-333, 1999.
  - 10) Gobbi, M.F., Kirby, J.T. and Wei, G : A fully nonlinear Boussinesq model for surface waves. Part2. Extension to  $O(kh)^4$ , J. Fluid Mech., Vol.405, pp.181-210, 2000.
  - 11) 音田慎一郎, 細田 尚, 木村一郎 : 鉛直加速度を考慮した水深積分モデルの改良と多次元数値解析結果を用いた検証について, 水工学論文集, 第46巻, pp.589-594, 2002.
  - 12) Onda, S., Hosoda, T. and Kimura, I. : Verification of a Refined Boussinesq Equation by Using Vertical 2-D Numerical Analysis, Proc. of the 13th IAHR-APD Congress, pp.750-755, 2002.
  - 13) 鉛直加速度を考慮した開水路流れの水深積分モデルの改良とその検証について, 土木学会論文集, No.761/II-67, pp.31-43, 2004.
  - 14) 細田 尚, 村本嘉男, 宮本雅章 : 水深積分モデルによる波状路床上の流れの底面せん断応力解析, 土木学会論文集, No.558/II-38, pp.81-89, 1997.
  - 15) Peregrine, D.H. : Calculation of the development of an undular bore, *J. Fluid Mech.*, Vol.25, pp.321-330, 1966.
  - 16) 藤井孝蔵 : 流体力学の数値計算法, 東京大学出版会, 1984.

## 第3章 移動一般座標系での水深積分モデルを用いた水槽内流体解析

### 3.1 概説

本章は、流れ場の境界形状が変化する場合にも適用できるよう、移動一般座標系で記述された水理解析法について考察することを目的としている。

移動一般座標系を用いた流体解析は、水工学の分野でもよく用いられている。例えば、自由境界である水面や河床を座標軸として基礎式を記述し、河川流や局所洗掘の多次元数値解析が行われている<sup>1,2)</sup>。また、本研究で用いている水深積分モデルについても移動一般座標系で表記され<sup>3)</sup>、河岸侵食を伴う河川の流路変動解析<sup>4,5)</sup>などが行われているが、基本的な現象に適用し、考察するために用いられたものは少ない。そこで本研究では、単純で基本的な水理現象を取り上げ、解析法の妥当性を検証する<sup>6,7)</sup>。

3.2 では、一定加速度場に置かれた水槽内の流体挙動について検討する。移動一般座標系での浅水流方程式を一定加速度場に置かれた水槽の運動に対応するよう、基礎式を変形し、有限体積法を用いて数値解析を行う。また、現象を定性的に考察するため、簡易モデルを導くとともに特性曲線法を用いて初期の水面変形過程に関する考察を行う。簡易モデルと数値解析結果を比較することで、計算結果の妥当性を検証する。

続く 3.3 では、造波板のように水槽の壁が動くことにより生じる波と流れなどを取り扱う。前節と同様に、各々のケースに応じて移動一般座標系での浅水流方程式を変形し、数値解析を行う。さらに、解析解、線形解などを求め、数値解析結果と比較することで計算結果の適合性を検証する。

最後に 3.4 では、振動台上に置かれた水槽内流体振動について検討する。振動台上の水槽内流体

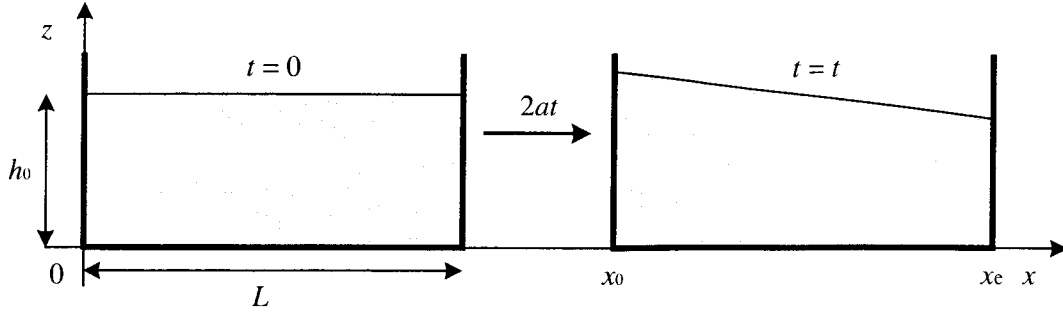


図-3.1 一定加速度場に置かれた水槽

挙動のような波・流れ共存場の水面変動を解析する場合、水深に対して波の波長が短くなる（高波数になる）と静水圧の仮定は成立しなくなる。従って、上記のケースで用いている静水圧仮定の浅水流方程式ではなく、鉛直加速度を考慮した水深積分モデル（Boussinesq 方程式）を用いる必要がある。一般に鉛直加速度を考慮した水深積分モデルによる流体解析では、固定座標系で表記されたものが多く、移動一般座標系で解析された研究は少ない。そこで本節では、移動一般座標系での浅水流方程式、Boussinesq 方程式を用い、振動台上に置かれた水槽内流体振動について検討する。まず、様々な条件下で水理実験を行い、水面挙動の特性について考察する。次に、浅水流方程式を基礎式として数値解析を行うとともに、現象の理解或いは計算結果の妥当性を検証するため、浅水流方程式、Boussinesq 方程式による線形解を導出する。実験結果と数値解析結果、線形解を比較することで、実験結果との適合性を検証する。

## 3.2 加速度場に置かれた水槽内の流体挙動

### 3.2.1 基礎式

本章では、連続式と運動方程式に水深方向に積分した水深積分モデル<sup>3)</sup>を用いる。その際、運動量方程式の誘導に当たって静水圧を仮定する。1次元移動一般座標系での連続式、運動量方程式を記述すれば以下ようになる。

[連続式]

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{h}{J} \right) + \frac{\partial}{\partial \xi} \left\{ (\xi_t + U) \frac{h}{J} \right\} = 0 \quad (3.1)$$

[運動量方程式]

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{M}{J} \right) + \frac{\partial}{\partial \xi} \left\{ (\xi_t + U) \frac{M}{J} \right\} + gh \frac{\xi_x}{J} \frac{\partial h}{\partial \xi} = 0 \quad (3.2)$$

ここで、 $t$ : 時間、 $\xi$ : 一般座標、 $\xi_t$ ,  $\xi_x$ : 変換のメトリックス、 $h$ : 水深、 $U$ : 流速ベクトルの反変成分 ( $=u\xi_x$ )、 $u$ :  $x$  方向の水深平均流速、 $M$ :  $x$  方向の流量フラックス ( $=uh$ )、 $g$ : 重力加速度、 $J$ : 座標変換のヤコビアン（1次元解析の場合は $\xi_x$ となる）。

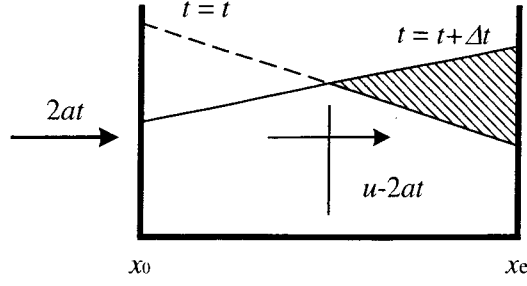


図-3.2 水深の直線分布を仮定した簡易モデル

式(3.1), (3.2)を図-3.1 で表される一定の加速度場に置かれた水槽の運動に対応するように基礎式を書き換えると、座標変換のメトリックスは下記ようになる。

$$x_0 = at^2, \quad x_e = L + at^2$$

$$\xi = \frac{x - x_0(t)}{L}, \quad \xi_x = \frac{1}{L}, \quad \xi_t = -\frac{2at}{L}$$

ここに、 $x_0$ ,  $x_e$  : 水槽の左端, 右端の座標,  $L$  : 水槽の長さ,  $a$  : 加速度の 1/2 である。

上記の関係を式(3.1), (3.2)に代入すると、保存則系の基礎式(3.3), (3.4)が得られる。

[連続式]

$$\frac{\partial}{\partial t}(Lh) + \frac{\partial}{\partial \xi}[(u - 2at)h] = 0 \quad (3.3)$$

[運動量方程式]

$$\frac{\partial}{\partial t}(Lhu) + \frac{\partial}{\partial \xi}[(u - 2at)hu] + \frac{g}{2} \frac{\partial h^2}{\partial \xi} = 0 \quad (3.4)$$

### 3.2.2 現象の定性的考察

#### (1) 簡易モデルによる現象の定性的記述

現象を定性的に考察し、後述の数値解析結果と比較するデータとして簡易モデルを考える。図-3.2 のように水深を直線分布で仮定すると、次式で表される。

$$h = h_0 \left[ 1 - \alpha(t) \left( \xi - \frac{1}{2} \right) \right] \quad (3.5)$$

ここに、 $h_0$  : 初期水深,  $\alpha(t)$  : 水深の勾配。

斜線部における微小時間の水深変化を考えると、以下の式が成り立ち、さらに整理すると、式(3.6)が得られる。

$$\frac{1}{2} \frac{L}{2} \left[ h_0 \left\{ 1 - \alpha(t + \Delta t) \frac{1}{2} \right\} - h_0 \left\{ 1 - \alpha(t) \frac{1}{2} \right\} \right] = h_0 (u - 2at) \Delta t$$

$$\frac{du}{dt} = 2a - \frac{L}{8} \frac{d^2 \alpha(t)}{dt^2} \quad (3.6)$$

また、運動量方程式(3.4)を $\xi$ に関して0から1まで積分すると、式(3.7)が導かれ、式(3.6)を式(3.7)

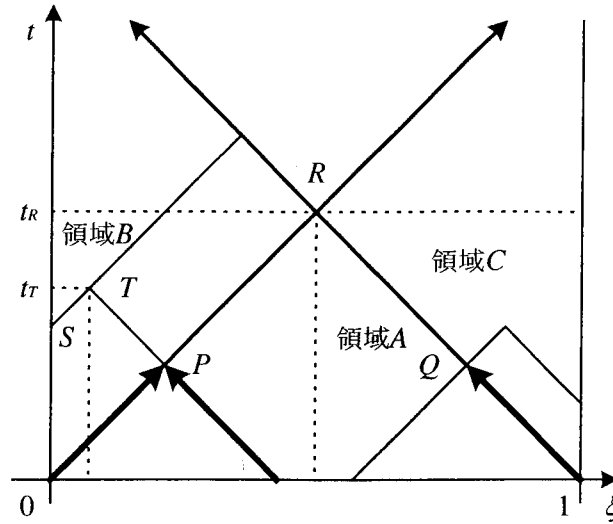


図-3.3 初期の水面変化に関する特性曲線

に代入し、以下の初期条件のもとで解くと、 $\alpha(t)$ に関して式(3.8)が得られる。

$$Lh_0 \frac{du}{dt} - gh_0^2 \alpha(t) = 0 \quad (3.7)$$

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \alpha(t)}{dt^2} + \frac{8gh_0}{L^2} \alpha(t) &= \frac{16a}{L} \quad ; \quad \alpha(0) = 0, \quad \frac{d\alpha(0)}{dt} = 0 \\ \alpha(t) &= -\frac{2aL}{gh_0} \cos\left(\frac{2\sqrt{2gh_0}}{L} t\right) + \frac{2aL}{gh_0} \end{aligned} \quad (3.8)$$

式(3.8)から、一定勾配の水面を中心に単振動することがわかる。

## (2) 特性曲線法による考察

次に、固定格子点の特性曲線法による基礎式を導くとともに、特性曲線法を用いて初期の水面形の時間変化を考察する。まず、基礎式の未知数を  $h$  と  $C = u - 2at$  に変換し、連続式、運動量方程式を行列表示すると次式となる。

$$\frac{\partial}{\partial t} \begin{bmatrix} h \\ C \end{bmatrix} + \frac{1}{L} \begin{bmatrix} C & h \\ g & C \end{bmatrix} \frac{\partial}{\partial \xi} \begin{bmatrix} h \\ C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -2a \end{bmatrix} \quad (3.9)$$

式(3.9)を若干変形すれば、次式が導かれる。

$$\frac{\partial}{\partial t} (C \pm \sqrt{gh}) + \frac{1}{L} (C \pm \sqrt{gh}) \frac{\partial}{\partial \xi} (C \pm \sqrt{gh}) = -2a \quad (3.10)$$

式(3.10)から初期の水面変形過程に関する解析解を求める。式(3.10)は次式と等価である。

$$\frac{d\xi}{dt} = \frac{1}{L} (C \pm \sqrt{gh}) \text{ 上で, } \frac{d}{dt} (C \pm 2\sqrt{gh}) = -2a$$

図-3.3を参照して上式を時間  $t = 0$  から  $t = t$  まで積分すると式(3.11)となる。なお、初期条件として  $t = 0$  のとき、 $C = 0$ 、 $h = h_0$  とする。

$$C \pm 2\sqrt{gh} = -2at \pm 2\sqrt{gh_0} \quad (3.11)$$



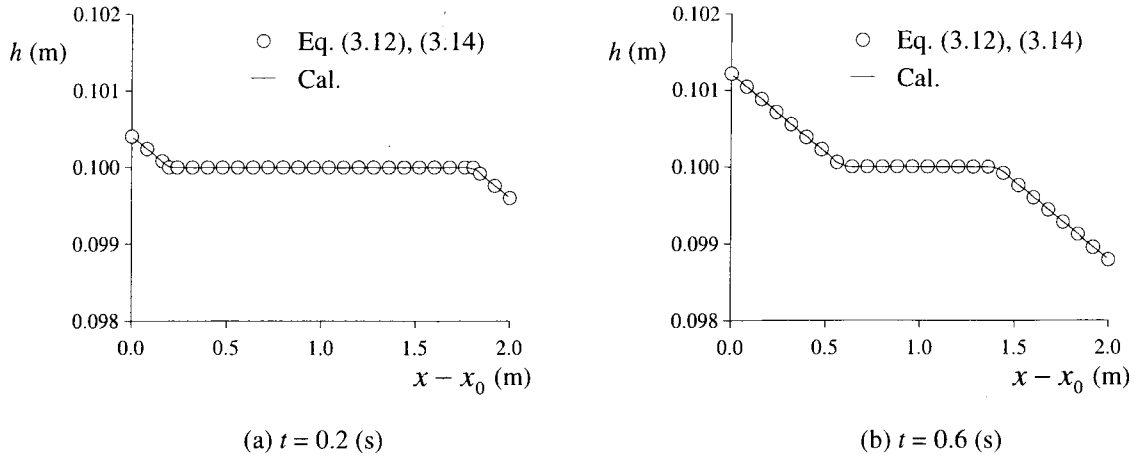


図-3.4 特性曲線による初期の水面変形過程

表-3.1 水槽が一定加速度で移動する場合の計算条件

Case	$L$ (m)	$h_0$ (m)	$a$ (m/s <sup>2</sup> )
A-1	2.0	0.1	0.01
A-2	2.0	0.1	1.0

以上より、左端 ( $\xi = 0$ )、右端 ( $\xi = 1$ ) での水深の時間変化に関して次式が導かれる。

$$\xi = 0 \quad ; \quad \sqrt{gh} = \sqrt{gh_0} + at, \quad C = 0$$

$$\xi = 1 \quad ; \quad \sqrt{gh} = \sqrt{gh_0} - at, \quad C = 0$$

また、式(3.11)から図-3.3中の領域A内の水理量は次式で与えられる。

$$\text{【領域A内の解】} \quad h = h_0, \quad C = -2at \quad (3.12)$$

さらに、曲線OR上の点Pの位置と時間の関係は次のようになる。曲線1Rについても同様である。

$$\xi(t)_P = \frac{1}{L} \int_0^L (-2at + \sqrt{gh_0}) dt = \frac{1}{L} (\sqrt{gh_0}t - at^2) \quad (3.13)$$

同様の考察により、領域B内の点Tの水理量、及び曲線STの軌跡は次式で求められる。

【領域B内の解】

$$C_T = 2a(t_s - t_T), \quad \sqrt{gh_T} = at_s + \sqrt{gh_0} \quad (3.14)$$

$$\xi(t)_T = \frac{1}{L} \int_s^r (C + \sqrt{gh_0}) dt = \frac{1}{L} \left\{ (3at_s + \sqrt{gh_0})(t_s - t_T) - a(t_T^2 - t_s^2) \right\} \quad (3.15)$$

領域B中の点Tの座標  $\xi_T$ ,  $t_T$  を与え、式(3.15)に代入して  $t_s$  を求め、さらに式(3.14)に代入すると点Tの水理量が計算できる。以上のようにして求めた初期の水面変形過程(表-3.1のCaseA-1)を図-3.4に示した。また、数値解析法を検証するため、計算結果も併せてプロットした。壁の両端から水面が変形し、中央に及ぶ様子が確認でき、計算結果は解析解と一致している。

上記のように、水面の初期変形過程については特性曲線法から解析解が求められるが、その後の水面の時間変化については、解析解を導くことは困難であるため、本研究では次項で数値解析による再現を試みる。

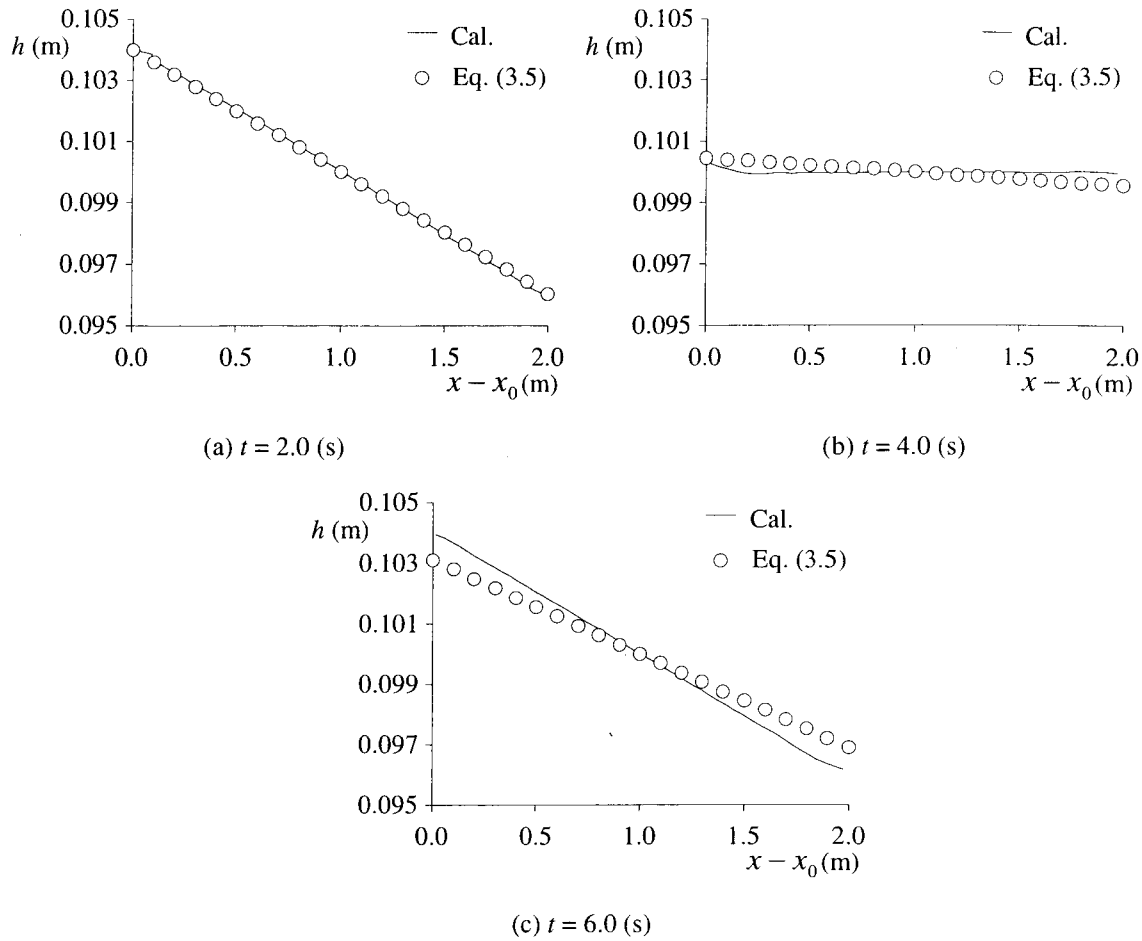


図-3.5 水面形の時間変化 (CaseA-1)

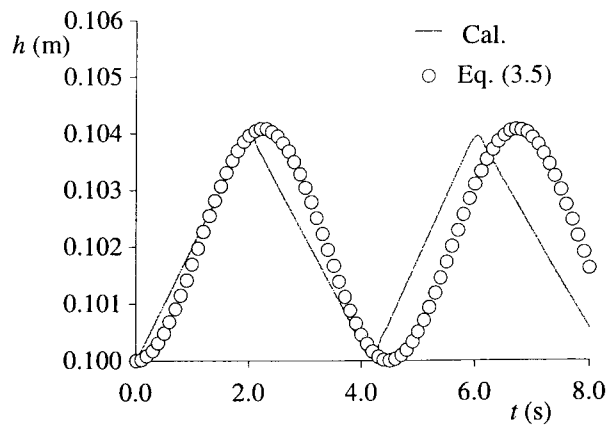


図-3.6 右端壁の水深の時間変化 (CaseA-1)

### 3.2.3 数値解析法

数値解析法として、有限体積法を用いる。変数をスタッガードで配置し、移流項の離散化として1次精度の上流差分を適用する。但し、段波のような現象を計算しても不連続部で数値振動が生じないように、数値粘性項を付加している。計算法の詳細は参考文献<sup>8,9)</sup>に記載されているので省略する。

計算条件を表-3.1に示す。水槽の長さ、初期水深を固定し、加速度が小さい場合 (CaseA-1),

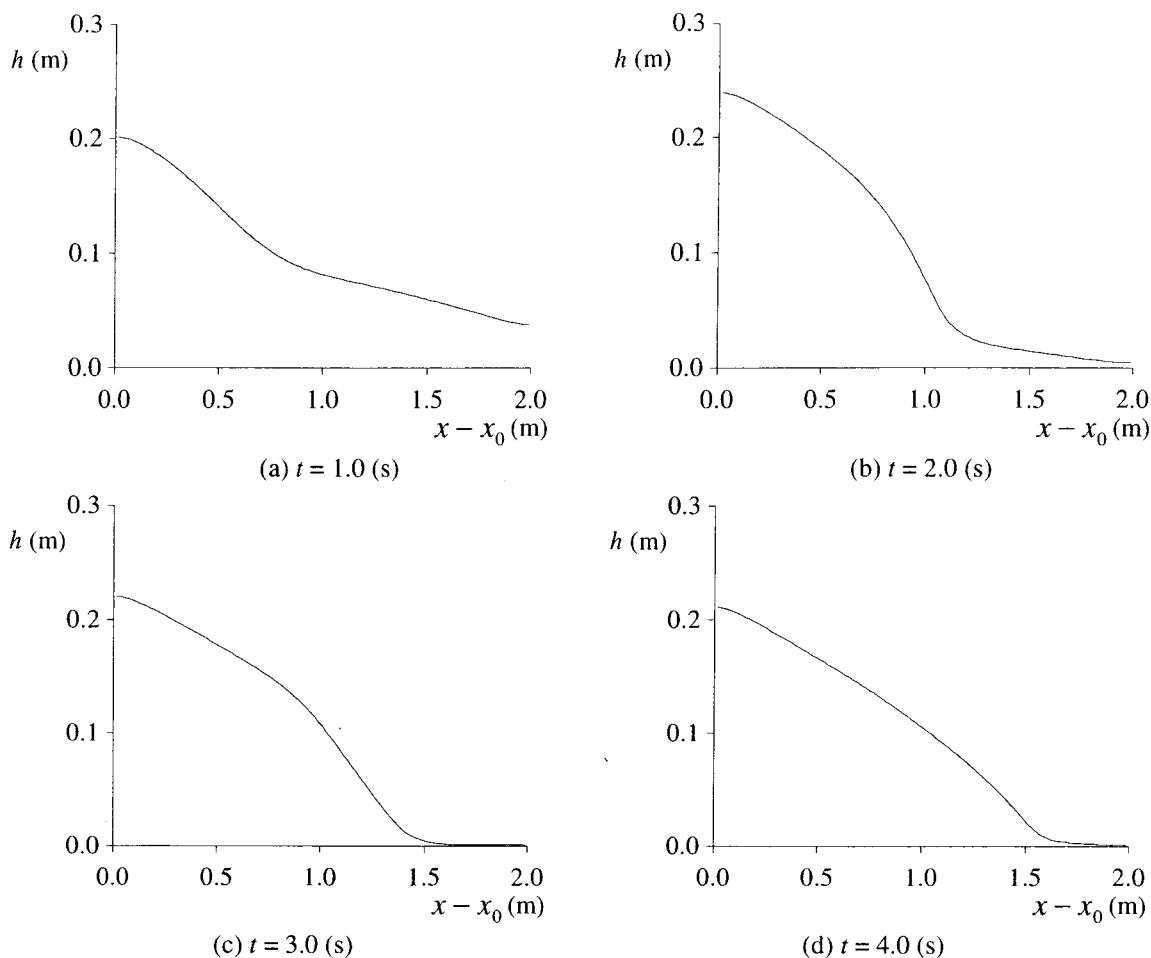


図-3.7 水面形の時間変化 (CaseA-2)

大きい場合 (CaseA-2) について検討した。計算格子は 100 とした。

### 3.2.4 計算結果の考察

図-3.5, 3.6 は、加速度が小さい場合の水面形の時間変化、左端壁の水深の時系列を表したものである。簡易モデルによる定性的考察で述べたように、水面の振動している様子が確認できる。また、図-3.6 をみると計算結果と簡易モデルは、振幅においてはほぼ一致しているものの、周期に違いが見られる。しかし、水槽の長さに対して水深を深くすることで両者は適合し、その比 ( $h_0/L$ ) が 0.2 でほぼ一致した。

一方、加速度が大きい場合の水面形の時間変化を示したものが図-3.7 である。時間の経過とともに水面がある一定の位置で固定され、水の無い領域が現れることがわかる。

## 3.3 壁の運動により生じる水槽内流体解析

本節では、水槽の鉛直壁を一定速度で移動させた場合、或いはある周期のもとで振動させた場合の水面変動について考察する。

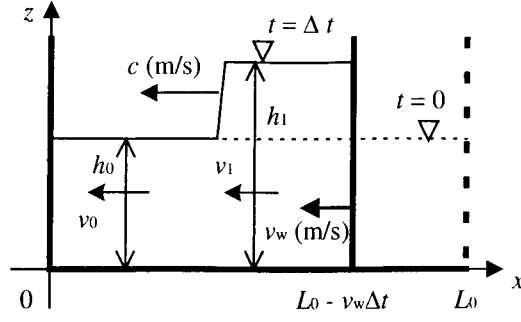


図-3.8 右壁が一定速度で移動する場合の模式図

### 3.3.1 壁が一定速度で移動する場合

#### (1) 基礎式

図-3.8のように、水槽の右壁が一定速度  $v_w$  で移動する場合を考え、保存則系と微分系の基礎式を以下に示す。

水槽の長さ  $L$  が初期値  $L_0$  から以下のように変化するとする。

$$L = L_0 - v_w t, \quad \frac{dL}{dt} = -v_w, \quad \xi = \frac{x}{L}$$

この場合、メトリックスは下記のようになり、式(3.1)、(3.2)に代入すると連続式、運動量方程式は式(3.16)、(3.17)で表される。

$$\xi_x = \frac{1}{L}, \quad \xi_t = -\frac{\xi}{L} \frac{dL}{dt} = \frac{v_w \xi}{L}$$

[連続式]

$$\frac{\partial}{\partial t}(Lh) + \frac{\partial}{\partial \xi}[(u + v_w \xi)h] = 0 \quad (3.16)$$

[運動量方程式]

$$\frac{\partial}{\partial t}(Lhu) + \frac{\partial}{\partial \xi}[(u + v_w \xi)hu] + gh \frac{\partial h}{\partial \xi} = 0 \quad (3.17)$$

さらに、式(3.16)、(3.17)から特性曲線法の関係式を求める。連続式、運動量方程式を変形すると、以下ようになる。

$$\begin{aligned} \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{u + v_w \xi}{L} \frac{\partial h}{\partial \xi} + \frac{h}{L} \frac{\partial u}{\partial \xi} &= 0 \\ \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{u + v_w \xi}{L} \frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{g}{L} \frac{\partial h}{\partial \xi} &= 0 \end{aligned}$$

上式を行列表記すると下記のようになる。

$$\frac{\partial}{\partial t} \begin{bmatrix} h \\ u \end{bmatrix} + \frac{1}{L} \begin{bmatrix} u + v_w \xi & h \\ g & u + v_w \xi \end{bmatrix} \frac{\partial}{\partial \xi} \begin{bmatrix} h \\ u \end{bmatrix} = 0$$

よって、特性曲線上の関係を表す式(3.18)が導かれる。

表-3.2 壁が一定速度で移動する場合の計算条件

Case	$L_0$ (m)	$h_0$ (m)	$v_w$ (m/s)
V-1	1.0	0.1	0.1
V-2	1.0	0.1	1.0

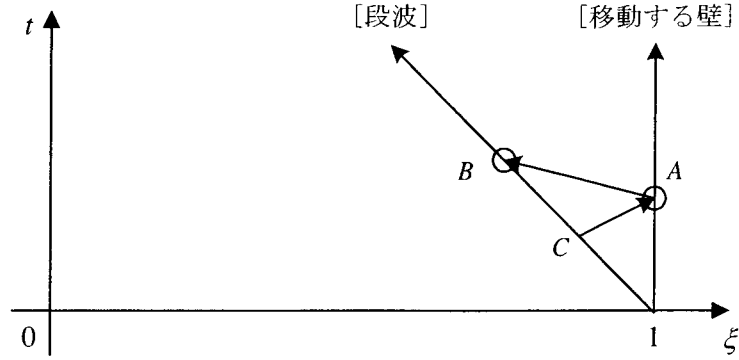


図-3.9 段波の波高に関する特性曲線網

$$\frac{\partial}{\partial t}(u \pm 2\sqrt{gh}) + \frac{1}{L}(u + v_w \xi \pm \sqrt{gh}) \frac{\partial}{\partial \xi}(u \pm 2\sqrt{gh}) = 0 \quad (3.18)$$

## (2) 数値解析法

前節と同様に、数値解析法として有限体積法を用いており、変数の配置、離散化、計算格子についても同様である。計算条件を表-3.2に示す。

## (3) 理論的考察

壁の移動速度と段波の特性量の関係を導く。段波が一定の波速  $c$  で伝播しているとする、流れ場全体に速度  $-c$  を加えることで、段波は相対的に静止する。段波をはさむ前後2断面での連続式は以下のように表される（図-3.8 参照）。

$$h_1(v_1 - c) = h_0(v_0 - c) \quad (3.19)$$

次に、運動量の保存を考える。流体の流出入による2断面間の単位時間あたりの運動量の増加は、式(3.19)を用いると次式となる。

$$\rho h_1(v_1 - c)^2 - \rho h_0(v_0 - c)^2 = -\rho h_0(v_0 - c)(v_0 - v_1) \quad (3.20)$$

ここに  $\rho$ : 水の密度。

底面摩擦を無視し、圧力を静水圧で仮定すると、2断面間の流体における力の釣り合い式が求められる。

$$\rho h_0(v_0 - c)(v_0 - v_1) + \rho g \frac{(h_1 - h_0)^2}{2} + \rho g h_0(h_1 - h_0) = 0 \quad (3.21)$$

式(3.19)、(3.21)から  $v_1$  を消去し、 $v_0 = 0$  を代入すると、段波の波速の関係式が導かれる。

$$c = \sqrt{\frac{g(h_1 + h_0)h_1}{2h_0}} = \sqrt{gh_0 \left[ \frac{1}{2} \frac{h_1}{h_0} \left( \frac{h_1}{h_0} + 1 \right) \right]^{\frac{1}{2}}} \quad (3.22)$$

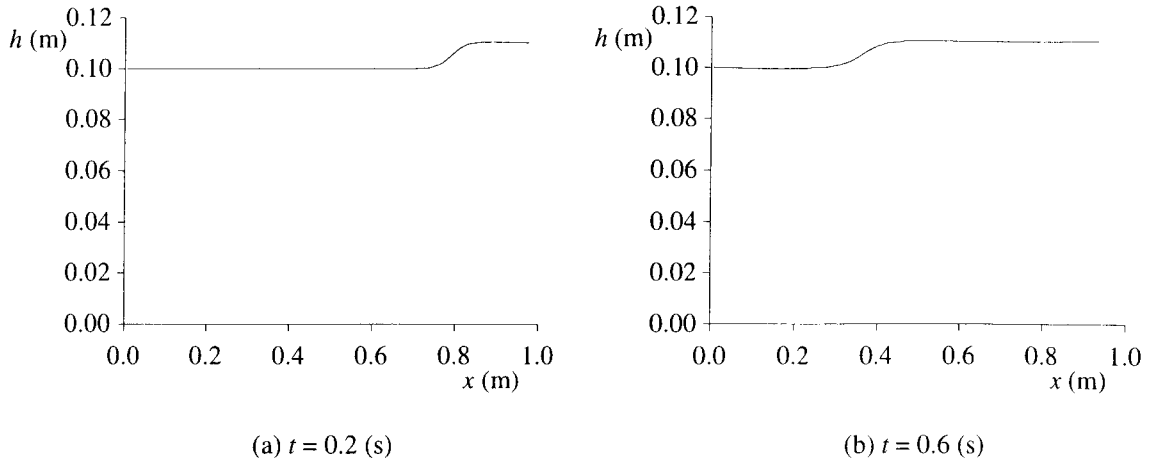


図-3.10 水面形の時間変化 (CaseV-1)

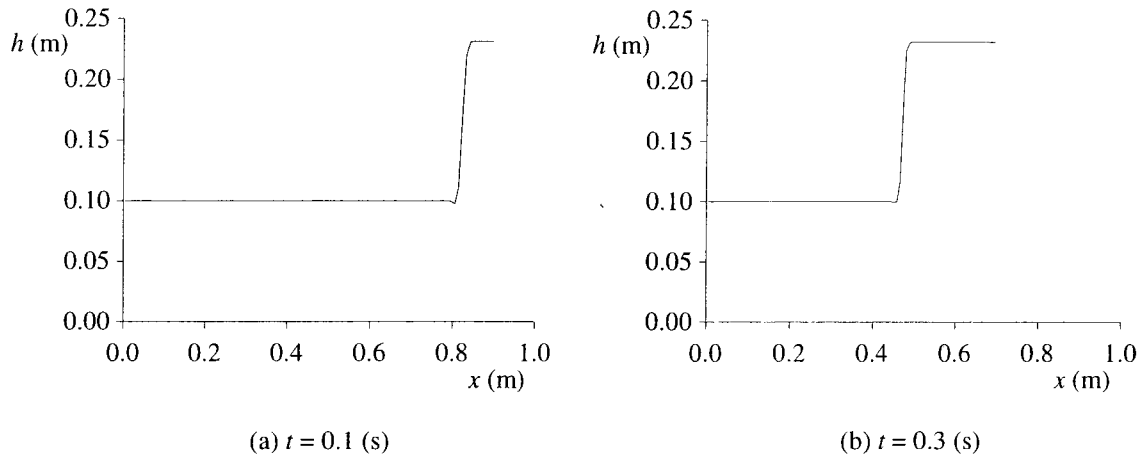


図-3.11 水面形の時間変化 (CaseV-2)

よって、 $c \geq \sqrt{gh_0}$  である。さらに、壁の移動速度と段波の波速、波高の関係式を求めるため、図-3.9のような特性曲線網を考える。直線 AB, CA は特性曲線であり、段波が点 C, B に位置しているとする。式(3.18)から、特性曲線 AB 上で以下の式が成り立つ。

$$u_B - 2\sqrt{gh_B} = u_A - 2\sqrt{gh_A} \quad (3.23)$$

ここで、 $u_B = u_C$ ,  $h_B = h_C$  を仮定すると、次の式が成り立つ。

$$u_A + 2\sqrt{gh_A} = u_C + 2\sqrt{gh_C} = u_B + 2\sqrt{gh_B} \quad (3.24)$$

式(3.23), (3.24)から段波上流部の流速は壁の移動速度と等しいことが示される。

$$u_B = u_A = v_w, \quad \sqrt{gh_B} = \sqrt{gh_A} = \sqrt{gh_1}$$

次に、式(3.19)と(3.22)から上流部の波高（水深）を求めると、以下の関係が導かれる。

$$c = \frac{h_1 v_w - 0}{h_1 - h_0} = \sqrt{gh_0} \left[ \frac{1}{2} \frac{h_1}{h_0} \left( \frac{h_1}{h_0} + 1 \right) \right]^{\frac{1}{2}} \quad (3.25)$$

式(3.25)を変形すると、壁の移動速度  $v_w$  と波高の関係式(3.26)が得られる。

$$\left( \frac{h_1}{h_0} \right)^3 - \left( \frac{h_1}{h_0} \right)^2 - \frac{h_1}{h_0} \left( 1 + \frac{2v_w^2}{gh_0} \right) + 1 = 0 \quad (3.26)$$

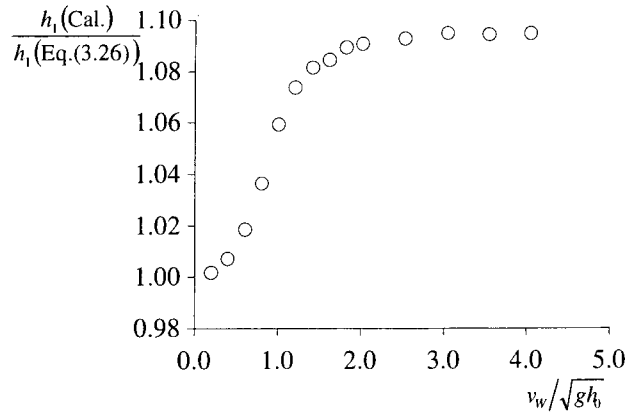


図-3.12 段波上流部波高に関する比較

#### (4) 結果と考察

右壁の移動速度  $v_w$  が  $\sqrt{gh_0}$  を超えない場合, 超える場合について各々計算結果を示したものが, 図-3.10, 3.11 である. 図をみると, 時間の経過とともに段波が進んでいく様子がわかる. また, 壁の移動速度が  $\sqrt{gh_0}$  を超える場合と超えない場合で, 段波の形状に違いが見られるが, これは壁の移動による運動量輸送の大きさが異なるためではないかと考えられる. 移動速度が  $\sqrt{gh_0}$  を超える場合では, 水深勾配が大きく, 砕波が起こると考えられるが, 本研究では砕波モデルを考慮していないので, この点については今後の課題である.

次に, 壁の移動速度を様々に変化させ, 段波上流部の波高に関して理論解と計算結果を比較したものが, 図-3.12 である. 壁の移動速度が小さい場合には運動量輸送も小さく, 式(3.25)を導く際の仮定が成立するため計算結果と解析値が一致している.

### 3.3.2 右壁を振動させる場合

#### (1) 基礎式

右壁を以下のように一定周期  $T (= 2\pi/\omega_0, \omega_0: \text{角振動数})$  で振動させる場合を考え, 保存則系の基礎式を以下に示す.

$$L = L_0 + d_w \sin(\omega_0 t), \quad \frac{dL}{dt} = d_w \omega_0 \cos(\omega_0 t)$$

よって, 座標変換メトリックスは次のようになる.

$$\xi = \frac{x}{L}, \quad \xi_x = \frac{1}{L}, \quad \xi_t = -\frac{\xi}{L} \frac{dL}{dt} = -\frac{\xi d_w \omega_0 \cos(\omega_0 t)}{L}$$

上記の関係を式(3.1), (3.2)に代入すると, 連続式, 運動量方程式について以下の式が得られる.

[連続式]

$$\frac{\partial}{\partial t}(Lh) + \frac{\partial}{\partial \xi} [\{u - \xi d_w \omega_0 \cos(\omega_0 t)\}h] = 0 \quad (3.27)$$

[運動量方程式]

表-3.3 右壁を振動させる場合の計算条件

Case	$L_0$ (m)	$h_0$ (m)	$d_w$ (m)	$T$ (s)
D-1	1.0	0.1	0.02	20.0
D-2	1.0	0.1	0.2	5.0

$$\frac{\partial}{\partial t}(Lhu) + \frac{\partial}{\partial \xi} \left[ \{u - \xi d_w \omega_0 \cos(\omega_0 t)\} hu \right] + gh \frac{\partial h}{\partial \xi} = 0 \quad (3.28)$$

### (2) 数値解析法

前節と同様に、数値解析法として有限体積法を用い、変数の配置、離散化、計算格子については前述のとおりである。計算条件の一部を表-3.3に示す。

### (3) 線形解

壁の振幅  $d_w$  が壁の長さ  $L_0$  に比べて十分小さく、角振動数  $\omega_0$  も小さい（ゆっくりと振動する）場合について理論解析を行い、線形解を求める。

まず、次式のように水理量を平均値と微小な偏差の和として表し、基礎式を線形化する。

$$h = h_0 + h', \quad u = u_0 + u' \quad (u_0 = 0) \quad (3.29)$$

上式を基礎式系に代入すると以下ようになる。

[連続式]

$$(L_0 + d_w \sin(\omega_0 t)) \frac{\partial h'}{\partial t} + h_0 \frac{\partial u'}{\partial \xi} - d_w \xi \omega_0 \cos(\omega_0 t) \frac{\partial h'}{\partial \xi} = 0 \quad (3.30)$$

[運動量方程式]

$$(L_0 + d_w \sin(\omega_0 t)) \frac{\partial u'}{\partial t} - \xi d_w \omega_0 \cos(\omega_0 t) \frac{\partial u'}{\partial \xi} + g \frac{\partial h'}{\partial \xi} = 0 \quad (3.31)$$

式(3.30)、(3.31)を変形すると、 $h'$ に関する線形化方程式が得られる。

$$\begin{aligned} & - (L_0 + d_w \sin(\omega_0 t))^2 \frac{\partial^2 h'}{\partial t^2} - \xi d_w \omega_0^2 \{ L_0 \sin(\omega_0 t) + d_w \sin^2(\omega_0 t) + d_w \} \frac{\partial h'}{\partial \xi} \\ & + 2 \xi d_w \omega_0 \cos(\omega_0 t) (L_0 + d_w \sin(\omega_0 t)) \frac{\partial^2 h'}{\partial t \partial \xi} + (gh_0 - \xi^2 d_w^2 \omega_0^2 \cos^2(\omega_0 t)) \frac{\partial^2 h'}{\partial \xi^2} = 0 \end{aligned} \quad (3.32)$$

次に、壁面での境界条件は次のように与えられる。

[ $\xi = 1$  (移動する壁)]

$$u' = \frac{dL}{dt} = d_w \omega_0 \cos(\omega_0 t), \quad \frac{du'}{dt} = -d_w \omega_0^2 \sin(\omega_0 t) \quad (3.33)$$

この流速に関する境界条件を用いて、水面変動の境界条件が導かれる。式(3.33)を運動量方程式(3.31)に代入し、連続式(3.30)を用いて変形すると、以下の式が得られる。

$$d_w \omega_0 \cos(\omega_0 t) (L_0 + d_w \sin(\omega_0 t)) \frac{\partial h'}{\partial t} - d_w h_0 \omega_0^2 \sin(\omega_0 t) (L_0 + d_w \sin(\omega_0 t))$$



$$+ \left[ gh_0 - \{d_w \omega_0 \cos(\omega_0 t)\}^2 \right] \frac{\partial h'}{\partial \xi} = 0 \quad (3.34)$$

$[\xi=0$  (固定壁) ]

$$u' = 0$$

よって、運動量方程式(3.31)から以下の式が導かれる。

$$\frac{\partial h'}{\partial \xi} = 0 \quad (3.35)$$

ここで、 $h'$  をべき乗展開を用いて次のように表す。

$$h' = C_0(t) + C_2(t)\xi^2 + C_3(t)\xi^3 + C_4(t)\xi^4 + C_5(t)\xi^5 + \dots \quad (3.36)$$

式(3.36)を式(3.34)に代入すると、境界条件として式(3.37)を得る。

$$\begin{aligned} & d_w \omega_0 \cos(\omega_0 t) \{L_0 + d_w \sin(\omega_0 t)\} \left( \frac{dC_0}{dt} + \frac{dC_2}{dt} + \frac{dC_3}{dt} + \frac{dC_4}{dt} + \frac{dC_5}{dt} \right) \\ & - d_w h_0 \omega_0^2 \sin(\omega_0 t) (L_0 + d_w \sin(\omega_0 t)) \\ & + \left[ gh_0 - \{d_w \omega_0 \cos(\omega_0 t)\}^2 \right] \{2C_2 + 3C_3 + 4C_4 + 5C_5\} = 0 \end{aligned} \quad (3.37)$$

また、式(3.36)を式(3.32)に代入すると、式(3.38)が得られる。

$$\begin{aligned} & - \{L_0^2 + 2d_w L_0 \sin(\omega_0 t) + d_w^2 \sin^2(\omega_0 t)\} \left( \frac{d^2 C_0}{dt^2} + \frac{d^2 C_2}{dt^2} \xi^2 + \frac{d^2 C_3}{dt^2} \xi^3 + \frac{d^2 C_4}{dt^2} \xi^4 + \frac{d^2 C_5}{dt^2} \xi^5 \right) \\ & - \xi d_w \omega_0^2 \{L_0 \sin(\omega_0 t) + d_w \cos^2(\omega_0 t) + d_w\} \{2C_2 \xi + 3C_3 \xi^2 + 4C_4 \xi^3 + 5C_5 \xi^4\} \\ & + 2\xi d_w \omega_0 \{L_0 \cos(\omega_0 t) + d_w \sin(\omega_0 t) \cos(\omega_0 t)\} \left( 2 \frac{dC_2}{dt} \xi + 3 \frac{dC_3}{dt} \xi^2 + 4 \frac{dC_4}{dt} \xi^3 + 5 \frac{dC_5}{dt} \xi^4 \right) \\ & + \{gh_0 - \xi^2 d_w^2 \omega_0^2 \cos^2(\omega_0 t)\} \{2C_2 + 6C_3 \xi + 12C_4 \xi^2 + 20C_5 \xi^3\} = 0 \end{aligned} \quad (3.38)$$

式(3.38)を $\xi$ の各オーダーで整理し、 $\xi^0$ 、 $\xi^1$ 、 $\xi^2$ の各係数を0とすると、式(3.39)～(3.41)が得られる。

$$\xi^0 ; \quad - \{L_0^2 + 2d_w L_0 \sin(\omega_0 t) + d_w^2 \sin^2(\omega_0 t)\} \frac{d^2 C_2}{dt^2} + gh_0 2C_2 = 0 \quad (3.39)$$

$$\xi^1 ; \quad 6gh_0 C_3 = 0 \quad (3.40)$$

$$\begin{aligned} \xi^2 ; \quad & - \{L_0^2 + 2d_w L_0 \sin(\omega_0 t) + d_w^2 \sin^2(\omega_0 t)\} \frac{d^2 C_2}{dt^2} \\ & - d_w \omega_0^2 \{L_0 \sin(\omega_0 t) + d_w \cos^2(\omega_0 t) + d_w\} 2C_2 \\ & + 2d_w \omega_0 \{L_0 \cos(\omega_0 t) + d_w \sin(\omega_0 t) \cos(\omega_0 t)\} 2 \frac{dC_2}{dt} \\ & + 12gh_0 C_4 - d_w^2 \omega_0^2 \cos^2(\omega_0 t) 2C_2 = 0 \end{aligned} \quad (3.41)$$

また、体積一定の条件から次式が得られる。

$$\begin{aligned} & L_0 \left( C_0 + \frac{1}{3} C_2 + \frac{1}{4} C_3 + \frac{1}{5} C_4 + \frac{1}{6} C_5 \right) \\ & + d_w \sin(\omega_0 t) \left( h_0 + C_0 + \frac{1}{3} C_2 + \frac{1}{4} C_3 + \frac{1}{5} C_4 + \frac{1}{6} C_5 \right) = 0 \end{aligned} \quad (3.42)$$

ここで,  $C_0 \sim C_5$  を以下のおく. 但し, 式(3.40)から  $C_3 = 0$  とする.

$$C_0 = \alpha_{01} \sin(\omega_0 t) + \beta_{01} \cos(\omega_0 t) \quad (3.43a)$$

$$C_2 = \alpha_{21} \sin(\omega_0 t) + \beta_{21} \cos(\omega_0 t) \quad (3.43b)$$

$$C_4 = \alpha_{41} \sin(\omega_0 t) + \beta_{41} \cos(\omega_0 t) \quad (3.43c)$$

$$C_5 = \alpha_{51} \sin(\omega_0 t) + \beta_{51} \cos(\omega_0 t) \quad (3.43d)$$

式(3.43)を式(3.42)に代入すると, 次のようになる.

$$\begin{aligned} & \sin(\omega_0 t) \left( L_0 \alpha_{01} + \frac{1}{3} L_0 \alpha_{21} + \frac{1}{5} L_0 \alpha_{41} + \frac{1}{6} L_0 \alpha_{51} + d_w h_0 \right) \\ & + \cos(\omega_0 t) \left( L_0 \beta_{01} + \frac{1}{3} L_0 \beta_{21} + \frac{1}{5} L_0 \beta_{41} + \frac{1}{6} L_0 \beta_{51} \right) = 0 \end{aligned} \quad (3.44)$$

同様に, 式(3.37)は(3.45)となる.

$$\begin{aligned} & \{d_w \omega_0 L_0 \cos(\omega_0 t) + d_w^2 \omega_0 \cos(\omega_0 t) \sin(\omega_0 t)\} \\ & \times \{ \cos(\omega_0 t) \omega_0 (\alpha_{01} + \alpha_{21} + \alpha_{41} + \alpha_{51}) - \sin(\omega_0 t) \omega_0 (\beta_{01} + \beta_{21} + \beta_{41} + \beta_{51}) \} \\ & - \{d_w h_0 \omega_0^2 L_0 \sin(\omega_0 t) + d_w^2 h_0 \omega_0^2 \sin^2(\omega_0 t)\} \\ & + \{g h_0 - d_w^2 \omega_0^2 \cos^2(\omega_0 t)\} \\ & \times \{ \sin(\omega_0 t) (2\alpha_{21} + 4\alpha_{41} + 5\alpha_{51}) + \cos(\omega_0 t) (2\beta_{21} + 4\beta_{41} + 5\beta_{51}) \} \end{aligned} \quad (3.45)$$

さらに, 式(3.39), (3.41)に代入して  $d_w^2$  の項を無視し,  $\sin(\omega_0 t)$ ,  $\cos(\omega_0 t)$  の係数を 0 とおくと, 以下の代数方程式が得られる.

式(3.45)より,

$$\sin(\omega_0 t) \quad ; \quad -d_w h_0 \omega_0^2 L_0 + g h_0 (2\alpha_{21} + 4\alpha_{41} + 5\alpha_{51}) = 0 \quad (3.46a)$$

$$\cos(\omega_0 t) \quad ; \quad 2\beta_{21} + 4\beta_{41} + 5\beta_{51} = 0 \quad (3.46b)$$

式(3.39)より,

$$\sin(\omega_0 t) \quad ; \quad L_0^2 \omega_0^2 \alpha_{01} + 2g h_0 \alpha_{21} = 0 \quad (3.47a)$$

$$\cos(\omega_0 t) \quad ; \quad L_0^2 \omega_0^2 \beta_{01} + 2g h_0 \beta_{21} = 0 \quad (3.47b)$$

式(3.41)より,

$$\sin(\omega_0 t) \quad ; \quad L_0^2 \omega_0^2 \alpha_{21} + 12g h_0 \alpha_{41} = 0 \quad (3.48a)$$

$$\cos(\omega_0 t) \quad ; \quad L_0^2 \omega_0^2 \beta_{21} + 12g h_0 \beta_{41} = 0 \quad (3.48b)$$

式(3.44)より,

$$\sin(\omega_0 t) \quad ; \quad \alpha_{01} + \frac{1}{3} \alpha_{21} + \frac{1}{5} \alpha_{41} + \frac{1}{6} \alpha_{51} = -\frac{d_w h_0}{L_0} \quad (3.49a)$$

$$\cos(\omega_0 t) \quad ; \quad \beta_{01} + \frac{1}{3} \beta_{21} + \frac{1}{5} \beta_{41} + \frac{1}{6} \beta_{51} = 0 \quad (3.49b)$$

式(3.47), (3.48)からそれぞれ

$$\alpha_{01} = \frac{-2g h_0}{L_0^2 \omega_0^2} \alpha_{21}, \quad \beta_{01} = \frac{-2g h_0}{L_0^2 \omega_0^2} \beta_{21}$$

$$\alpha_{41} = \frac{-2g h_0}{L_0^2 \omega_0^2} \alpha_{21}, \quad \beta_{41} = \frac{-2g h_0}{L_0^2 \omega_0^2} \beta_{21}$$

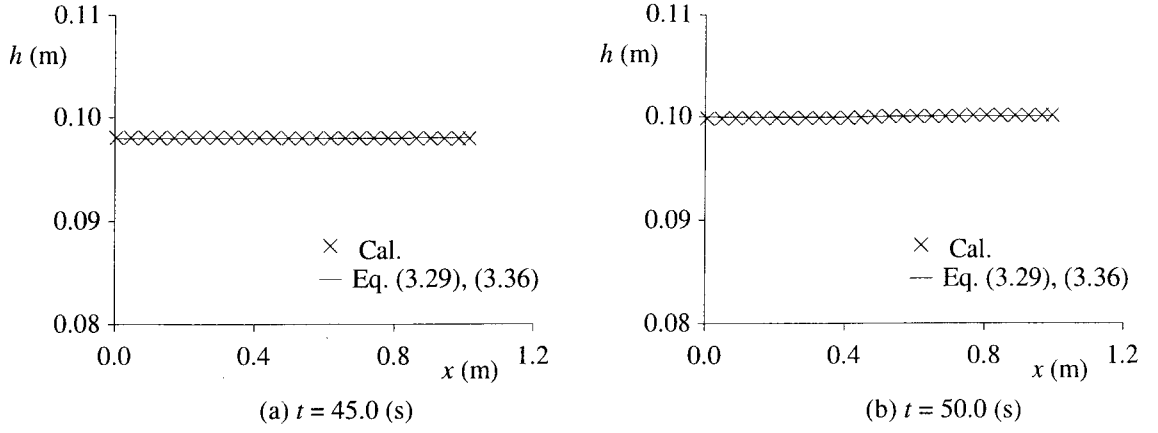


図-3.13 水面形の時間変化 (CaseD-1)

が導かれ、式(3.46)、(3.49)に代入して整理すると、次式となる。

$$\left(2 - \frac{L_0^2 \omega_0^2}{3gh_0}\right) \alpha_{21} + 5\alpha_{51} = \frac{d_w h_0 L_0 \omega_0^2}{gh_0}$$

$$\left(-\frac{2gh_0}{L_0^2 \omega_0^2} + \frac{1}{3} - \frac{L_0^2 \omega_0^2}{60gh_0}\right) \alpha_{21} + \frac{1}{6} \alpha_{51} = \frac{-d_w h_0}{L_0}$$

上記の連立1次方程式を解くことにより、係数が次のように求まる。

$$\alpha_{21} = \frac{d_w h_0}{L_0} \frac{36X(X+30)}{6(X^2 - 48X + 360)} \quad (3.50)$$

$$\alpha_{51} = \frac{d_w h_0}{L_0} \frac{-36X^3}{60(X^2 - 48X + 360)} \quad (3.51)$$

さらに、 $\alpha_{01}$ 、 $\alpha_{41}$ が得られる。

$$\alpha_{01} = \frac{-d_w h_0}{L_0} \frac{72X(X+30)}{6(X^2 - 48X + 360)} \quad (3.52)$$

$$\alpha_{41} = \frac{-d_w h_0}{L_0} \frac{3X(X+30)}{6(X^2 - 48X + 360)} \quad (3.53)$$

ここに、 $X$ は次式で定義される。

$$X = \frac{L_0^2 \omega_0^2}{gh_0}$$

同様に、 $\beta$ については以下の式が成り立つ。

$$\beta_{01} = \beta_{21} = \beta_{41} = \beta_{51} = 0 \quad (3.54)$$

式(3.50)～(3.54)を式(3.36)と(3.43)に代入すると、水面変動に関する線形解を計算することができる。

#### (4) 考察

計算結果の例として、壁の振動振幅が小さく、振動の周期が大きい場合 (CaseD-1) について水面形の時間変化を示したものが図-3.13である。この場合には、線形解と計算結果がほぼ一致して

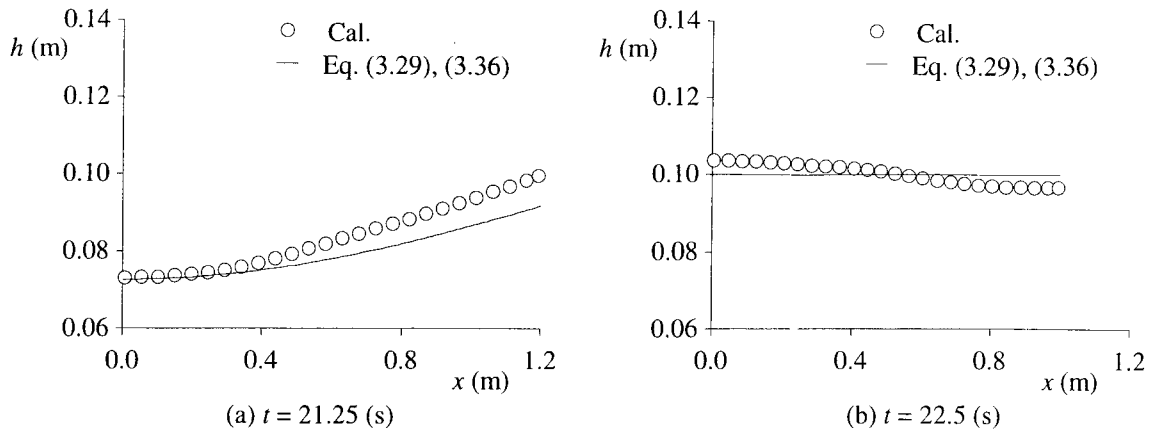


図-3.14 水面形の時間変化 (CaseD-2)

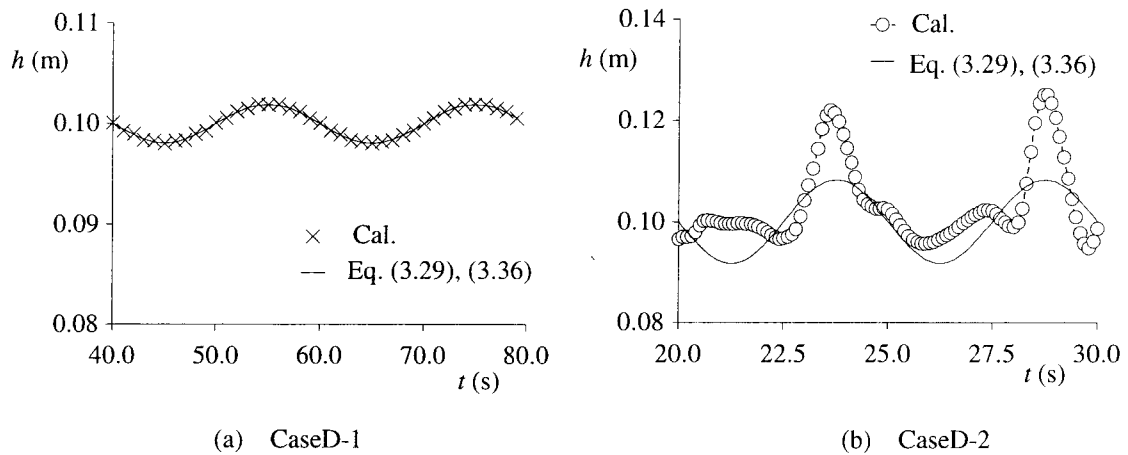


図-3.15 右端壁での水深の時間変化

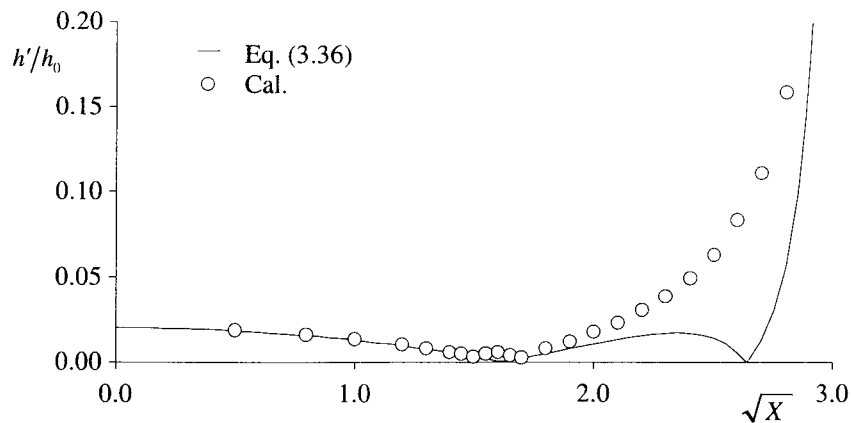
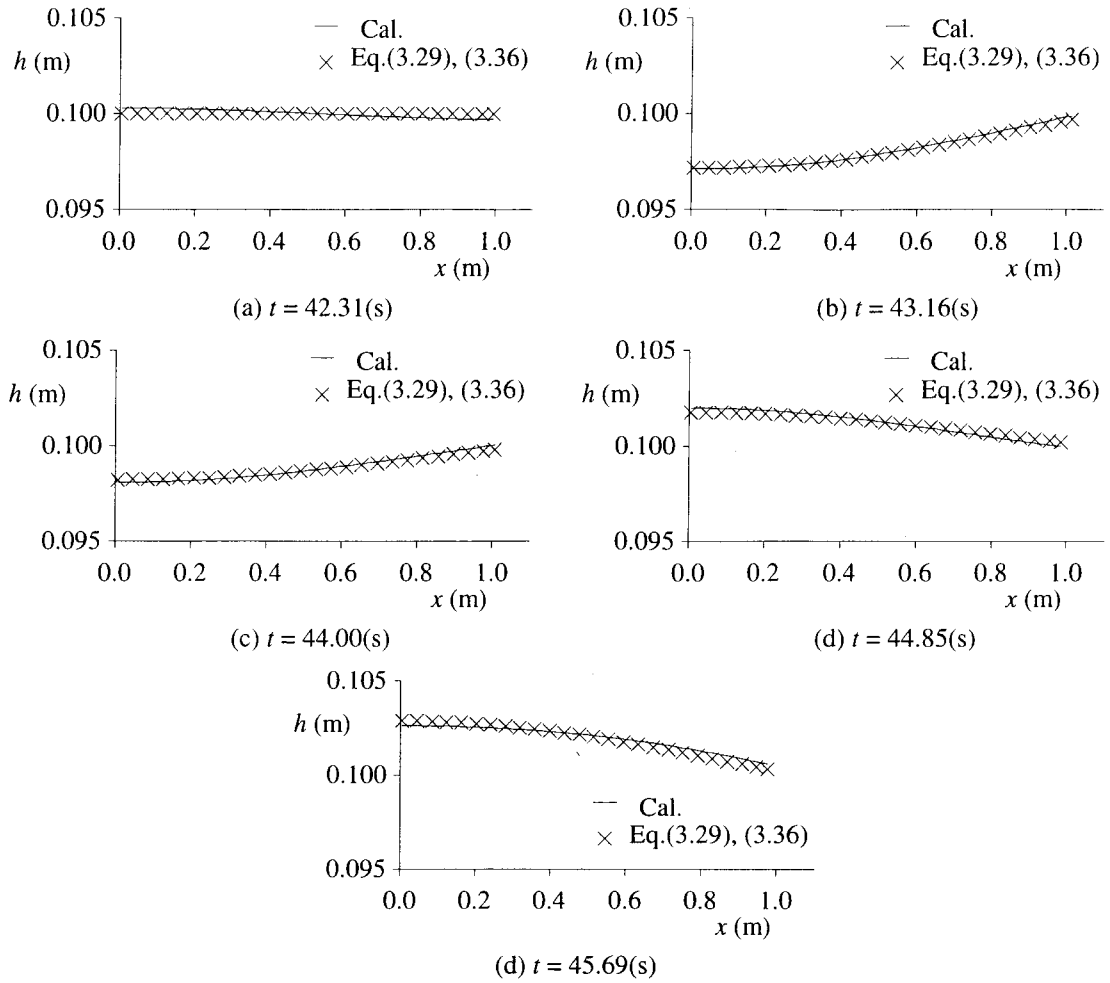
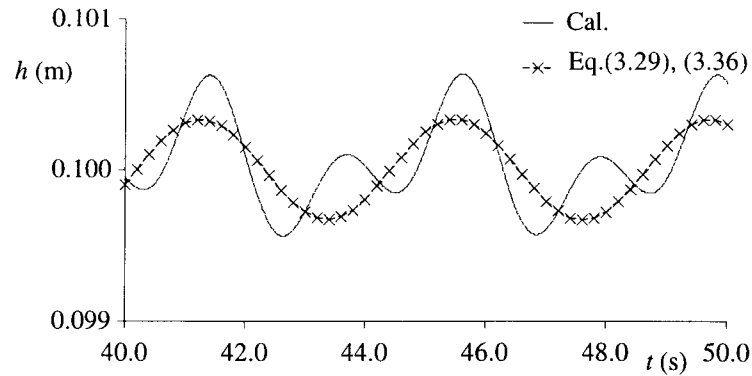


図-3.16 壁の振動数に対する右端壁での水面振動振幅の変化

いる。

一方、壁の振動の角振動数や振幅が大きい場合 (CaseD-2) について異なる時刻での水面形の比較を示したものが図-3.14 である。図をみると、この計算条件では角振動数、振幅が大きいため、計算結果と線形解は適合していない。

さらに、線形解と数値解析結果の適合性を検証するため、右端壁における水深の時系列を示したものが図-3.15 である。図を見ると、振幅が小さく、周期が長い CaseD-1 では線形解と計算結果

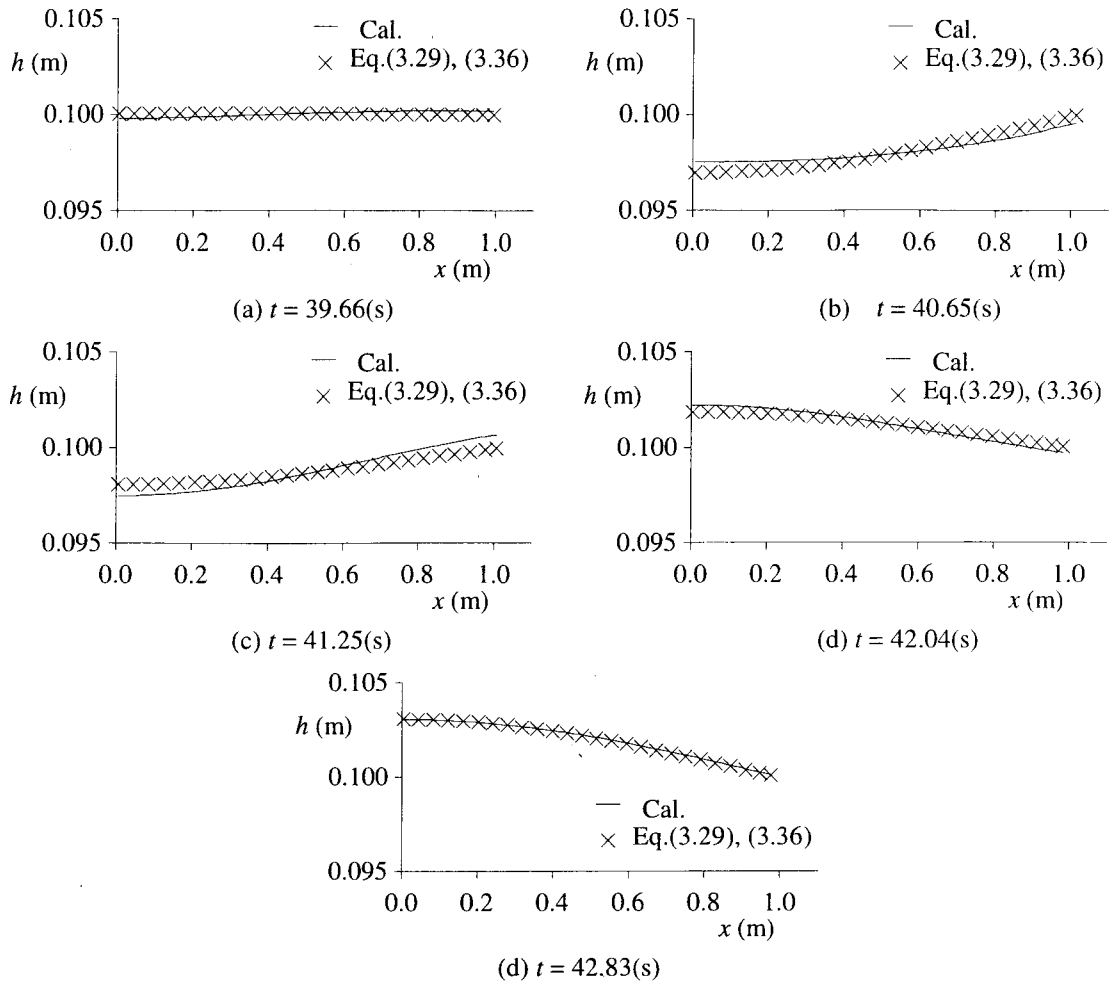
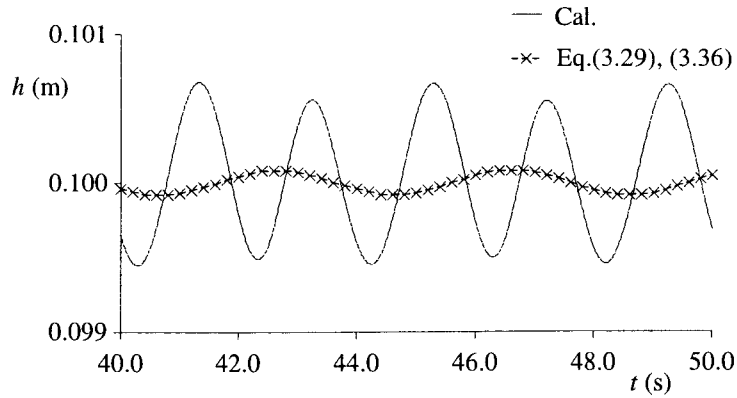

 図-3.17 水面形の時間変化 ( $\sqrt{X} = 1.5$ )

 図-3.18 右端壁での水深の時間変化 ( $\sqrt{X} = 1.5$ )

が一致している。

また、線形解析における水深分布式(3.36)の係数である式(3.50)～(3.53)の分母を0にすると、振幅と角振動数に関する共鳴関係式として次式が得られる。

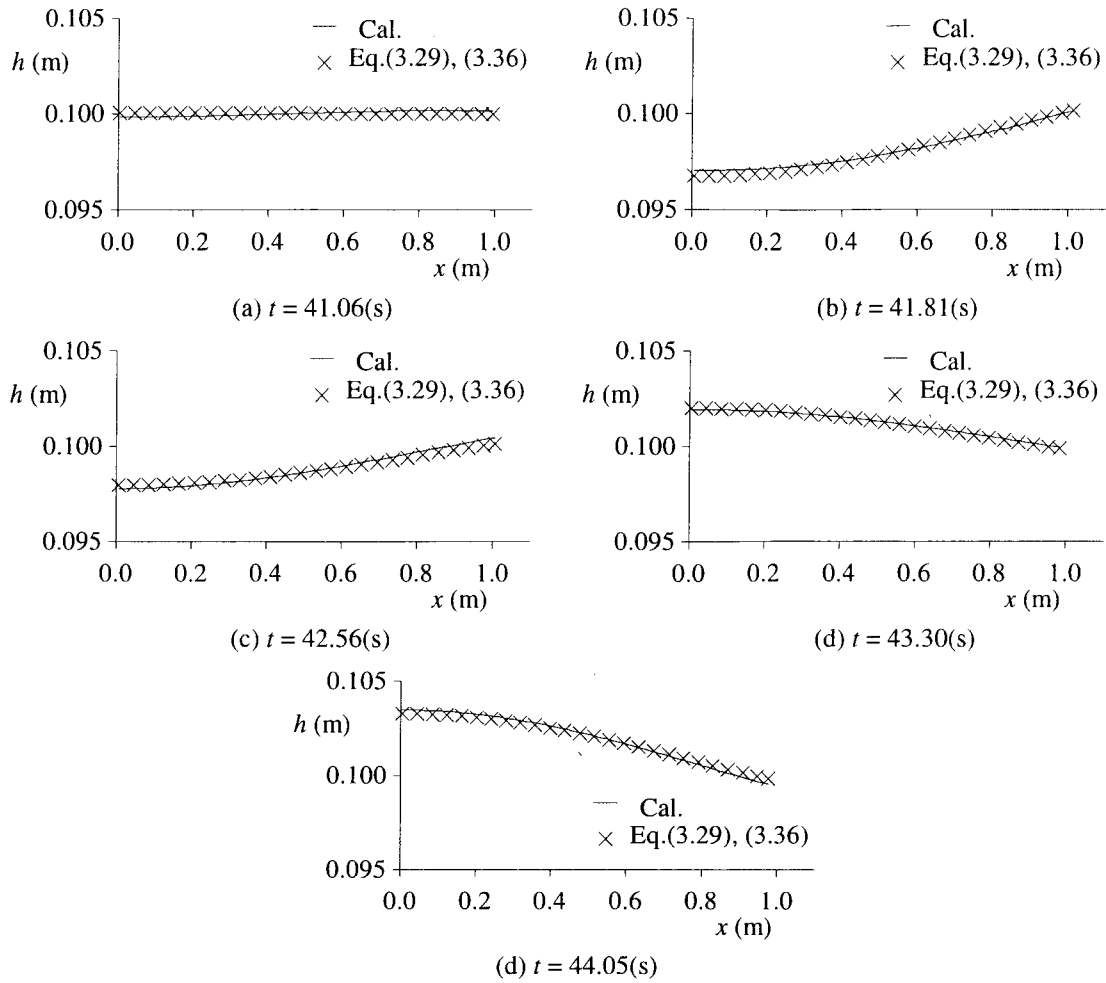
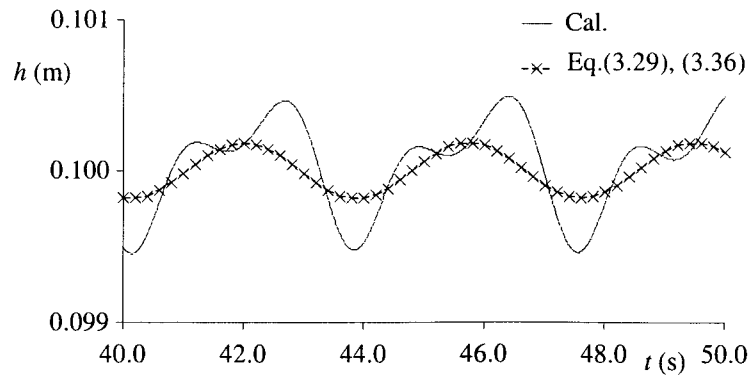
$$X^2 - 48X + 360 = 0 \quad (3.55)$$

上記の式から、共鳴点を示す角振動数について2つの解が存在する。

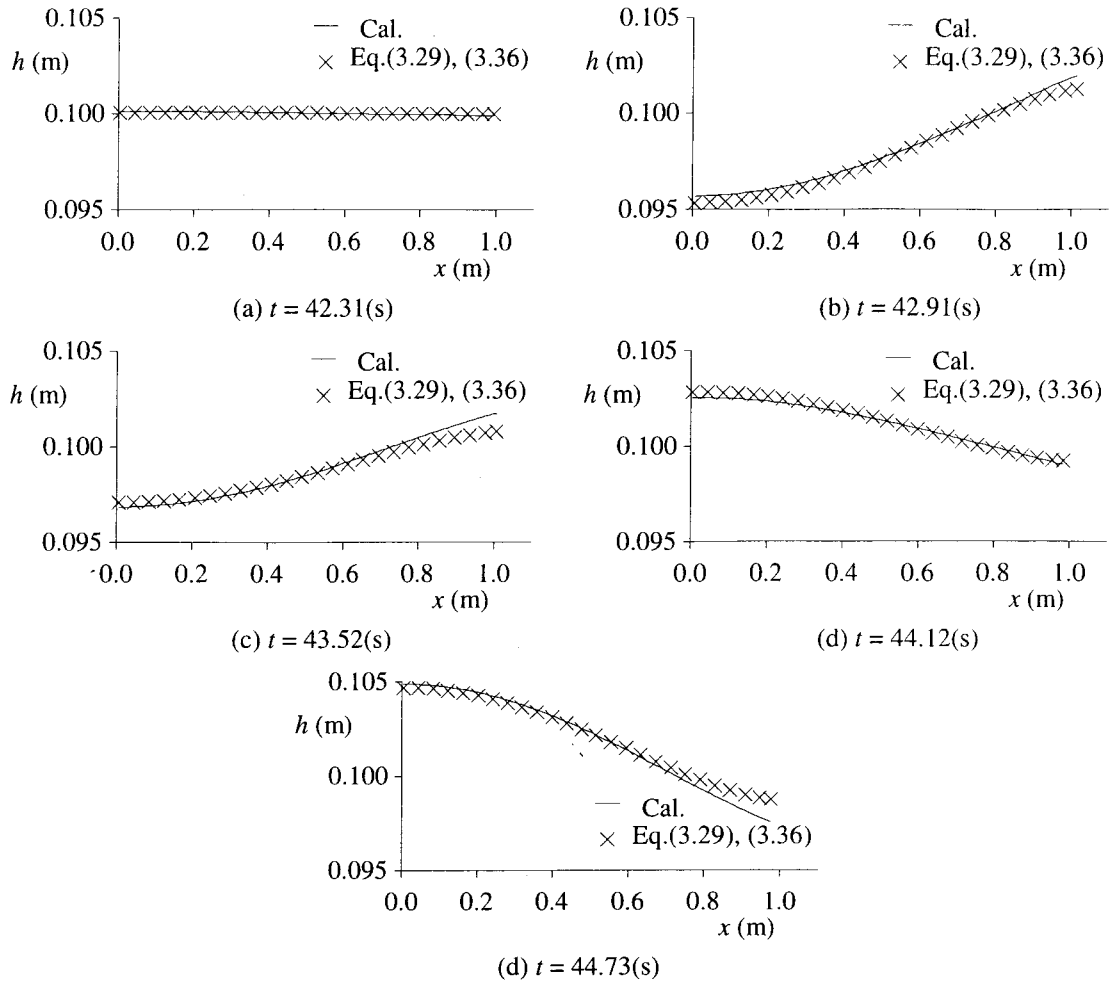
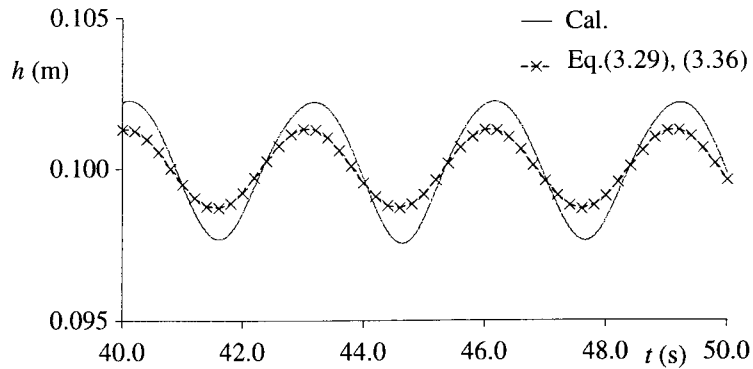

 図-3.19 水面形の時間変化 ( $\sqrt{X} = 1.6$ )

 図-3.20 右端壁での水深の時間変化 ( $\sqrt{X} = 1.6$ )

$$X = \frac{L_0^2 \omega_0^2}{gh_0} \approx 9.3 \text{ or } 38.7 \quad (3.56)$$

そこで、水槽の長さ  $L_0 = 1.0$  (m)、初期水深  $h_0 = 0.1$  (m)、振幅を小さい場合の  $d_w = 0.02$  (m) に固定し、角振動数  $\omega_0$  を変化させて数値解析を行い、共鳴関係について考察する。図-3.16 は、横軸に無次元量の  $\sqrt{X}$ 、縦軸に初期水深で無次元化された右端壁での水面振動振幅をとり、計算結果


 図-3.21 水面形の時間変化 ( $\sqrt{X} = 1.7$ )

 図-3.22 右端壁での水深の時間変化 ( $\sqrt{X} = 1.7$ )

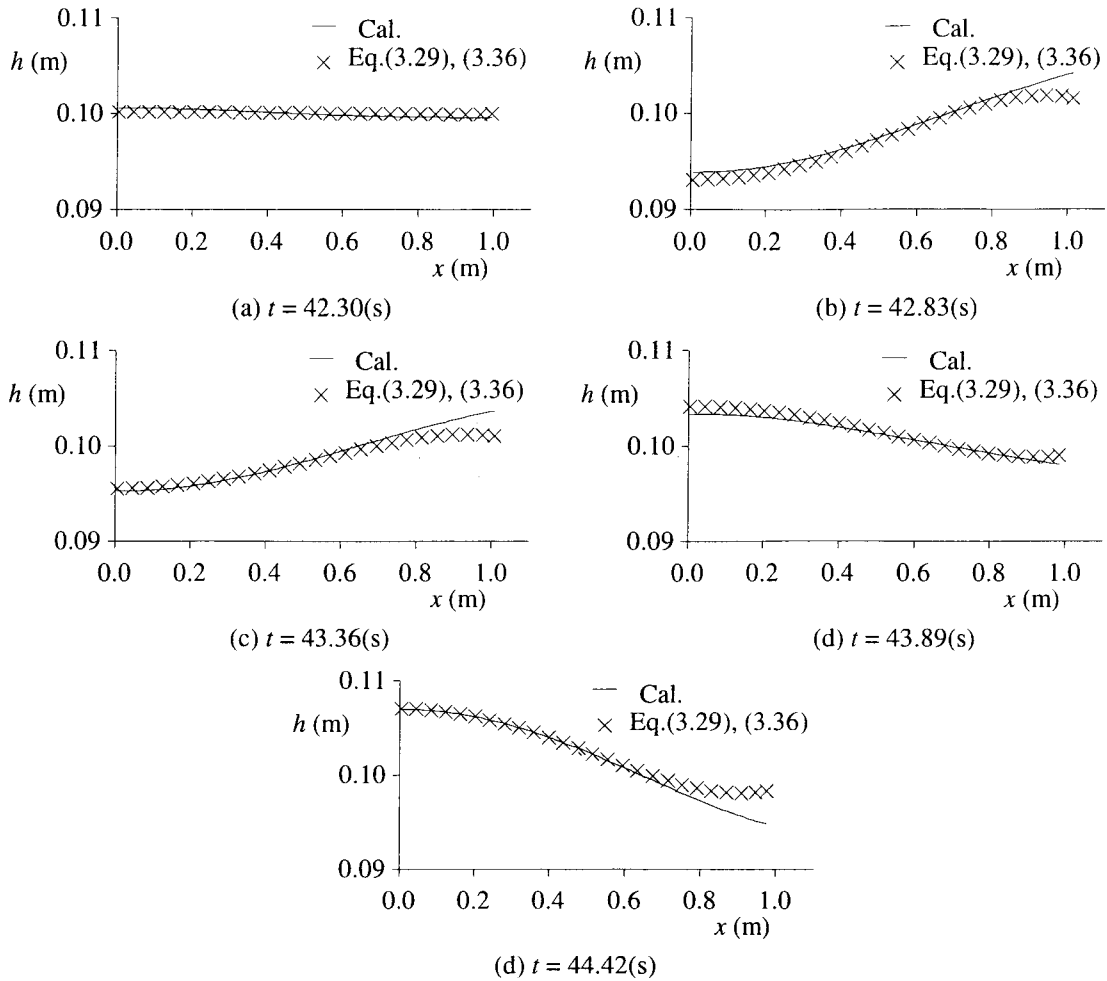
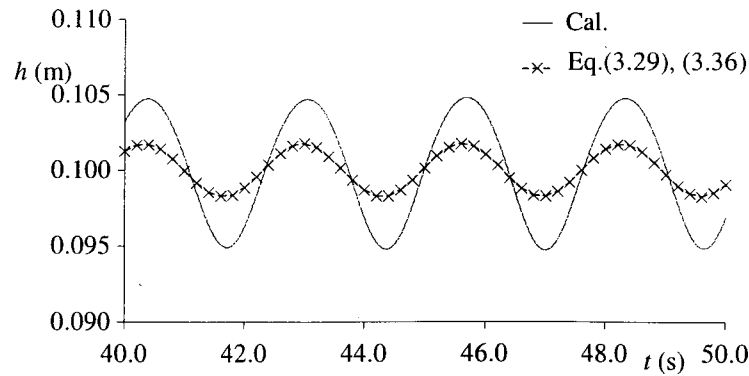
と線形解についてまとめたものである。なお、現実的な場合を考え、最も小さい周期を  $2.2(s)$  とする。図を見ると、 $\sqrt{X}$  が小さい領域では、計算結果と共鳴関係がほぼ一致しているが、 $\sqrt{X}$  が  $1.5$  付近と  $\sqrt{X} \geq 2.0$  の領域で適合性が十分ではない。そこで、まず  $\sqrt{X}$  が  $1.5$  付近での水面形及び右端壁での水深の時間変化について詳細に調べることににより、その理由を考察する。図-3.17～3.22 は  $\sqrt{X}$  が  $1.5, 1.6, 1.7$  (周期  $T$  はそれぞれ  $4.23, 3.97, 3.73s$ ) での水面形及び右端壁での水深の時間変化を示したものである。右端壁の水深の時間変化を見ても分かるように、計算結果は線形解に


 図-3.23 水面形の時間変化 ( $\sqrt{X} = 2.1$ )

 図-3.24 右端壁での水深の時間変化 ( $\sqrt{X} = 2.1$ )

比べて周期が短い高周波の波形を示している。線形解では、時間モードの係数を式(3.43)のように壁の振動数と同じように与えているため、計算結果に見られるような高周波の波を表すことができない。従って、線形解が計算結果とずれると考えられる。

次に、 $\sqrt{X}$  が 2.1, 2.4, 2.8 (周期  $T$  はそれぞれ 3.02, 2.65, 2.27s) の場合についても、線形解と計算結果が適合しない理由を考える。上記のケースにおいて、水面形及び右端壁での水深の時間変化を示したものが図-3.23~3.28 である。右壁での水深の時間変化をみると、これらのケースで




 図-3.25 水面形の時間変化 ( $\sqrt{X} = 2.4$ )

 図-3.26 右端壁での水深の時間変化 ( $\sqrt{X} = 2.4$ )

は、振動の周期は一致しているのに対し、右端壁での振動振幅が異なっている。水面形の空間分布を見ると、特に右壁壁付近で両者が大きく異なり、計算結果の水面勾配は線形解より大きくなっている。また、 $\sqrt{X}$  が大きい 2.8 のケースでは、図-3.28 より水深の時間変化にひずみが見られる。従って、非線形性の影響によって両者がずれるのではないかと考えられる。

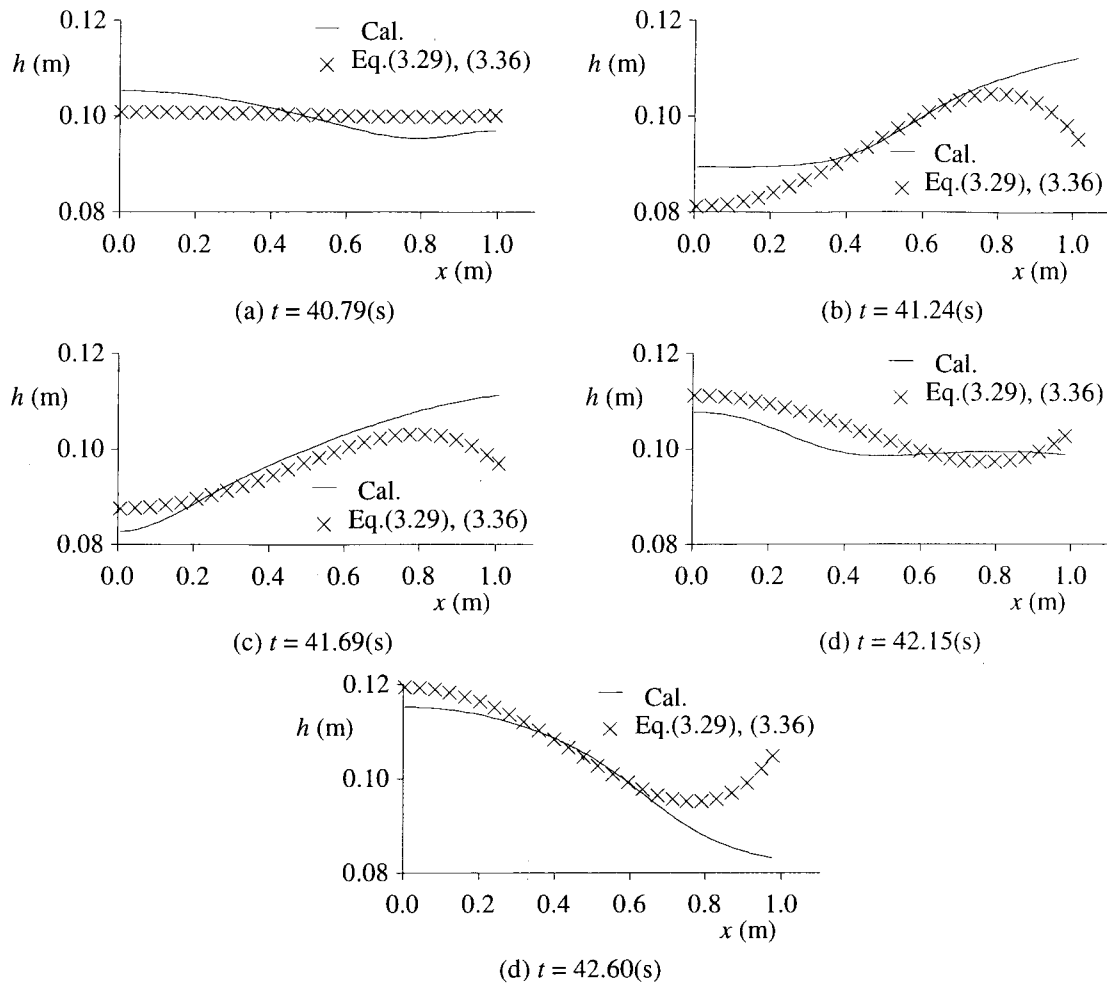


図-3.27 水面形の時間変化 ( $\sqrt{X} = 2.8$ )

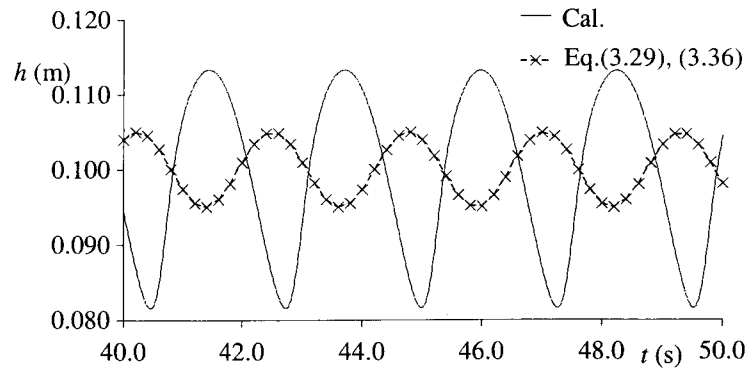


図-3.28 右端壁での水深の時間変化 ( $\sqrt{X} = 2.8$ )

### 3.4 振動台上に置かれた水槽内流体振動解析

#### 3.4.1 振動台上の水槽内流体振動に関する水理実験

##### (1) 実験の概要

長さ  $L = 1.0\text{m}$ 、幅  $0.1\text{m}$ 、高さ  $0.15\text{m}$  のアクリル製水槽を振動台 ((株)振研「低周波水平振動試

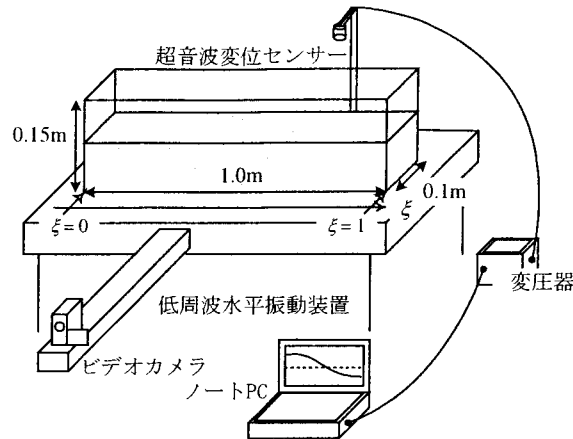


図-3.29 実験装置の概要

表-3.4 実験条件

Case	$h_0$ (m)	$f$ (Hz)	$d$ (m)
1	0.05	0.5	0.01
2	0.05	0.5	0.03
3	0.05	1.5	0.004
4	0.10	1.0	0.01

験装置」)の上に置き，初期水深  $h_0$ (m)，振動振幅  $d$ (m)，周波数  $f$ (Hz) (周期  $T = 1/f$ ) を変化させて実験を行った．実験装置の概要，実験条件の一部を図-3.29，表-3.4 に示す．振動台上には，デジタルビデオカメラ（CanonIXYDVM）を設置し，水槽内全体の流況を撮影した．また，超音波変位センサー（キーエンス製）を用いて  $\xi$  軸（振動台と共に移動する座標系）上のある固定点における水位の時間変化を 0.1(s)ごとに記録した．設置したセンサーの位置は，初期水深  $h_0 = 0.05$ m のとき， $\xi = 0.825$  であり，0.1m のとき  $\xi = 0.79$  である．

## (2) 実験結果

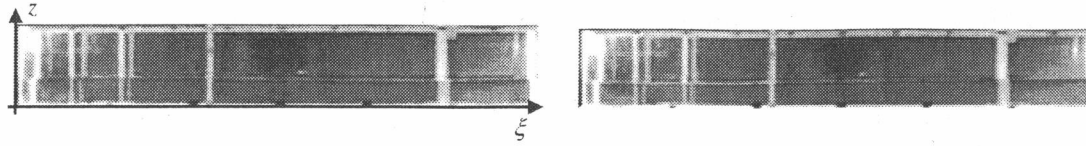
実験結果の例として，ビデオカメラより撮影された水面形の時間変化を示したものが図-3.30，3.31，3.32 である．図の時刻は，水面変動が定常状態となり，振動台がほぼ振動中心を通過した時間を  $t = 0$ (s)として表したものである．図をみると，振動装置の振動振幅が大きいケースほど鉛直方向の水面変動が大きく，周波数が高いケースほど水面の波数が多くなることがわかる．

### 3.4.2 浅水流方程式での基礎式系

まず，圧力分布に静水圧を仮定した場合の基礎式について誘導する．

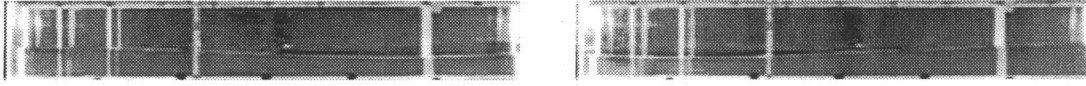
#### (1) 基礎式

一定周期で振動する振動台上に置かれた水槽の運動に対応するように基礎式を書き換えると，座標変換のメトリックスは以下ようになる．


 (a)  $t/T = 0.2$ 

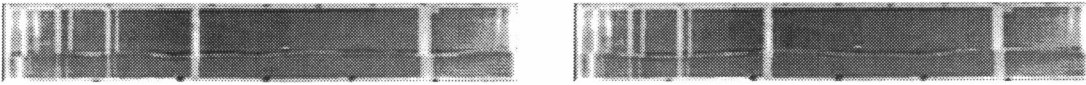
 (b)  $t/T = 0.8$ 

図-3.30 実験結果 (Case. 1)


 (a)  $t/T = 0.2$ 

 (b)  $t/T = 0.8$ 

図-3.31 実験結果 (Case. 2)


 (a)  $t/T = 0.4$ 

 (b)  $t/T = 0.8$ 

図-3.32 実験結果 (Case. 3)

$$\begin{aligned}
 x_0 &= d \sin(\omega_0 t), \quad x_e = L + d \sin(\omega_0 t) \\
 \xi &= \frac{x - x_0(t)}{L}, \quad \xi_x = \frac{1}{L}, \quad \xi_t = -\frac{d\omega_0 \cos(\omega_0 t)}{L}
 \end{aligned} \tag{3.57}$$

ここに、 $d$ ：水槽の振動振幅である。

上記の関係を式(3.1)，(3.2)に代入すると，式(3.58)，(3.59)が得られる。

[連続式]

$$\frac{\partial}{\partial t}(Lh) + \frac{\partial}{\partial \xi}[\{u - d\omega_0 \cos(\omega_0 t)\}h] = 0 \tag{3.58}$$

[運動量方程式]

$$\frac{\partial}{\partial t}(Lhu) + \frac{\partial}{\partial \xi}[\{u - d\omega_0 \cos(\omega_0 t)\}hu] + gh \frac{\partial h}{\partial \xi} = 0 \tag{3.59}$$

### (2) 数値解析法

前節と同様に，数値解析法には有限体積法を用いる。また，移流項の離散化には TVD-MUSCL<sup>10)</sup> を適用する。但し，段波のような現象を計算しても不連続部で数値振動が生じないように，数値粘性項を付加している。計算格子は 100 メッシュである。

### (3) 線形解

水槽の振動振幅  $d$  が水槽の長さに対して十分小さく，角振動数  $\omega_0$  も小さい場合について線形解を求める。

式(3.29)を基礎式系に代入し，線形化すると以下ようになる。

[連続式]

$$L \frac{\partial h'}{\partial t} + \{u_0 - d\omega_0 \cos(\omega_0 t)\} \frac{\partial h'}{\partial \xi} + h_0 \frac{\partial u'}{\partial \xi} = 0 \quad (3.60)$$

[運動量方程式]

$$\frac{\partial u'}{\partial t} + \frac{1}{L} \{u_0 - d\omega_0 \cos(\omega_0 t)\} \frac{\partial u'}{\partial \xi} + g \frac{1}{L} \frac{\partial h'}{\partial \xi} = 0 \quad (3.61)$$

式(3.60), (3.61)から  $u'$  を消去すると,  $h'$  に関する線形方程式が得られる.

$$\begin{aligned} L \frac{\partial^2 h'}{\partial t^2} - \frac{gh_0}{L} \frac{\partial^2 h'}{\partial \xi^2} + d\omega_0^2 \sin(\omega_0 t) \frac{\partial h'}{\partial \xi} \\ - 2d\omega_0 \cos(\omega_0 t) \frac{\partial^2 h'}{\partial t \partial \xi} + \frac{d^2 \omega_0^2 \cos^2(\omega_0 t)}{L} \frac{\partial^2 h'}{\partial \xi^2} = 0 \end{aligned} \quad (3.62)$$

壁面での境界条件は以下のように与えられる.

[ $\xi=0$  (左壁),  $\xi=1$  (右壁)]において

$$u' = \frac{dx_0}{dt} = \frac{dx_e}{dt} = d\omega_0 \cos(\omega_0 t) \quad (3.63)$$

この流速に関する境界条件を用いて, 水面変動の境界条件を導く. 式(3.63)を運動量方程式(3.61)に代入し, 連続式(3.60)を用いて変形すると, 以下の式が得られる.

$$d\omega_0 \cos(\omega_0 t) \frac{\partial h'}{\partial t} + h_0 \left\{ -dL\omega_0^2 \sin(\omega_0 t) + g \frac{\partial h'}{\partial \xi} \right\} - \{d\omega_0 \cos(\omega_0 t)\}^2 \frac{\partial h'}{\partial \xi} = 0 \quad (3.64)$$

一般に  $h'$  は三角関数を用いて表されることが多いが, ここでは線形解の誘導の簡便さからべき乗展開を用いて式(3.65)のように表す.

$$h' = D_0(t) + D_1(t)\xi + D_2(t)\xi^2 + D_3(t)\xi^3 + D_4(t)\xi^4 \quad (3.65)$$

式(3.65)を式(3.64)に代入すると, 境界条件として式(3.66)が得られる.

$$\begin{aligned} d\omega_0 L \cos(\omega_0 t) \left( \frac{dD_0}{dt} + \frac{dD_1}{dt} \xi + \frac{dD_2}{dt} \xi^2 + \frac{dD_3}{dt} \xi^3 + \frac{dD_4}{dt} \xi^4 \right) \\ - dh_0 \omega_0^2 L \sin(\omega_0 t) + gh_0 (D_1 + 2D_2 \xi + 3D_3 \xi^2 + 4D_4 \xi^3) \\ - d^2 \omega_0^2 \cos^2(\omega_0 t) (D_1 + 2D_2 \xi + 3D_3 \xi^2 + 4D_4 \xi^3) = 0 \end{aligned} \quad (3.66)$$

従って, 左壁 ( $\xi=0$ ), 右壁 ( $\xi=1$ ) での境界条件は以下のように表される.

[ $\xi=0$  (左壁)]

$$d\omega_0 L \cos(\omega_0 t) \frac{dD_0}{dt} - dh_0 \omega_0^2 L \sin(\omega_0 t) + gh_0 D_1 - \{d\omega_0 \cos(\omega_0 t)\}^2 D_1 = 0 \quad (3.67)$$

[ $\xi=1$  (右壁)]

$$\begin{aligned} d\omega_0 L \cos(\omega_0 t) \left( \frac{dD_0}{dt} + \frac{dD_1}{dt} + \frac{dD_2}{dt} + \frac{dD_3}{dt} + \frac{dD_4}{dt} \right) \\ - dh_0 \omega_0^2 L \sin(\omega_0 t) + gh_0 (D_1 + 2D_2 + 3D_3 + 4D_4) \\ - \{d\omega_0 \cos(\omega_0 t)\}^2 (D_1 + 2D_2 + 3D_3 + 4D_4) = 0 \end{aligned} \quad (3.68)$$

また, 式(3.65)を線形方程式(3.62)に代入すると, 式(3.69)が導かれる.

$$\begin{aligned}
 & L \left( \frac{dD_0}{dt^2} + \frac{dD_1}{dt^2} \xi + \frac{dD_2}{dt^2} \xi^2 + \frac{dD_3}{dt^2} \xi^3 + \frac{dD_4}{dt^2} \xi^4 \right) - \frac{gh_0}{L} (2D_2 + 6D_3\xi + 12D_4\xi^2) \\
 & + d\omega_0^2 \sin(\omega_0 t) (D_1 + 2D_2\xi + 3D_3\xi^2 + 4D_4\xi^3) \\
 & - 2d\omega_0 \cos(\omega_0 t) \left( \frac{dD_1}{dt} + 2\xi \frac{dD_2}{dt} + 3\xi^2 \frac{dD_3}{dt} + 4\xi^3 \frac{dD_4}{dt} \right) \\
 & + \frac{d^2\omega_0^2}{L} \cos^2(\omega_0 t) (2D_2 + 6D_3\xi + 12D_4\xi^2) = 0
 \end{aligned} \tag{3.69}$$

式(3.69)を $\xi$ の各オーダーで整理し、 $\xi^0$ 、 $\xi^1$ の係数を0とすると、式(3.70)、(3.71)が得られる。

$$\begin{aligned}
 \xi^0 : \quad & L \frac{d^2 D_0}{dt^2} - 2 \frac{gh_0}{L} D_2 + d\omega_0^2 \sin(\omega_0 t) D_1 \\
 & - 2d\omega_0 \cos(\omega_0 t) \frac{dD_1}{dt} + 2 \frac{d^2\omega_0^2}{L} \cos^2(\omega_0 t) D_2 = 0
 \end{aligned} \tag{3.70}$$

$$\begin{aligned}
 \xi^1 : \quad & L \frac{d^2 D_1}{dt^2} - 6 \frac{gh_0}{L} D_3 + 2d\omega_0^2 \sin(\omega_0 t) D_2 \\
 & - 4d\omega_0 \cos(\omega_0 t) \frac{dD_2}{dt} + 6 \frac{d^2\omega_0^2}{L} \cos^2(\omega_0 t) D_3 = 0
 \end{aligned} \tag{3.71}$$

また、体積一定の条件

$$V_0 = h_0 L = \int_{x_0}^x (h_0 + h') dx = \int_0^1 (h_0 + h') L d\xi = h_0 L + L \int_0^1 h' d\xi$$

から、式(3.72)が得られる。

$$D_0 + \frac{1}{2} D_1 + \frac{1}{3} D_2 + \frac{1}{4} D_3 + \frac{1}{5} D_4 = 0 \tag{3.72}$$

ここで、 $D_0 \sim D_4$ を以下のように仮定する。

$$D_0 = \gamma_{01} \sin(\omega_0 t) + \varepsilon_{01} \cos(\omega_0 t) \tag{3.73a}$$

$$D_1 = \gamma_{11} \sin(\omega_0 t) + \varepsilon_{11} \cos(\omega_0 t) \tag{3.73b}$$

$$D_2 = \gamma_{21} \sin(\omega_0 t) + \varepsilon_{21} \cos(\omega_0 t) \tag{3.73c}$$

$$D_3 = \gamma_{31} \sin(\omega_0 t) + \varepsilon_{31} \cos(\omega_0 t) \tag{3.73d}$$

$$D_4 = \gamma_{41} \sin(\omega_0 t) + \varepsilon_{41} \cos(\omega_0 t) \tag{3.73e}$$

式(3.73)を式(3.72)に代入すると、体積一定の条件として式(3.74)が導かれる。

$$\begin{aligned}
 & \sin(\omega_0 t) \left( \gamma_{01} + \frac{1}{2} \gamma_{11} + \frac{1}{3} \gamma_{21} + \frac{1}{4} \gamma_{31} + \frac{1}{5} \gamma_{41} \right) \\
 & + \cos(\omega_0 t) \left( \varepsilon_{01} + \frac{1}{2} \varepsilon_{11} + \frac{1}{3} \varepsilon_{21} + \frac{1}{4} \varepsilon_{31} + \frac{1}{5} \varepsilon_{41} \right) = 0
 \end{aligned} \tag{3.74}$$

さらに、式(3.73)を境界条件式(3.67)、(3.68)、線形方程式(3.70)、(3.71)に代入して、 $\sin(\omega_0 t)$ 、 $\cos(\omega_0 t)$ の係数を0とおくと以下の代数方程式が得られる。

式(3.67)より、

$$\sin(\omega_0 t) \quad ; \quad -dh_0 L \omega_0^2 + gh_0 \gamma_{11} - \frac{1}{4} d^2 \omega_0^2 \gamma_{11} = 0 \tag{3.75a}$$

$$\cos(\omega_0 t) \quad ; \quad gh_0 \varepsilon_{11} - \frac{3}{4} d^2 \omega_0^2 \varepsilon_{11} = 0 \quad (3.75b)$$

式(3.68)より,

$$\begin{aligned} \sin(\omega_0 t) \quad ; \quad & -dh_0 L \omega_0^2 + gh_0 (\gamma_{11} + 2\gamma_{21} + 3\gamma_{31} + 4\gamma_{41}) \\ & - \frac{1}{4} d^2 \omega_0^2 (\gamma_{11} + 2\gamma_{21} + 3\gamma_{31} + 4\gamma_{41}) = 0 \end{aligned} \quad (3.76a)$$

$$\begin{aligned} \cos(\omega_0 t) \quad ; \quad & gh_0 (\varepsilon_{11} + 2\varepsilon_{21} + 3\varepsilon_{31} + 4\varepsilon_{41}) \\ & - \frac{3}{4} d^2 \omega_0^2 (\varepsilon_{11} + 2\varepsilon_{21} + 3\varepsilon_{31} + 4\varepsilon_{41}) = 0 \end{aligned} \quad (3.76b)$$

式(3.70)より,

$$\sin(\omega_0 t) \quad ; \quad -L \omega_0^2 \gamma_{01} - \frac{2gh_0}{L} \gamma_{21} + \frac{d^2 \omega_0^2}{2L} \gamma_{21} = 0 \quad (3.77a)$$

$$\cos(\omega_0 t) \quad ; \quad -L \omega_0^2 \varepsilon_{01} - \frac{2gh_0}{L} \varepsilon_{21} + \frac{3d^2 \omega_0^2}{2L} \varepsilon_{21} = 0 \quad (3.77b)$$

式(3.71)より,

$$\sin(\omega_0 t) \quad ; \quad -L \omega_0^2 \gamma_{11} - \frac{6gh_0}{L} \gamma_{31} + \frac{3d^2 \omega_0^2}{2L} \gamma_{31} = 0 \quad (3.78a)$$

$$\cos(\omega_0 t) \quad ; \quad -L \omega_0^2 \varepsilon_{11} - \frac{6gh_0}{L} \varepsilon_{31} + \frac{9d^2 \omega_0^2}{2L} \varepsilon_{31} = 0 \quad (3.78b)$$

また, 式(3.74)の  $\sin(\omega_0 t)$ ,  $\cos(\omega_0 t)$  の係数を 0 とすると, 式(3.79)が得られる.

$$\sin(\omega_0 t) \quad ; \quad \gamma_{01} + \frac{1}{2} \gamma_{11} + \frac{1}{3} \gamma_{21} + \frac{1}{4} \gamma_{31} + \frac{1}{5} \gamma_{41} = 0 \quad (3.79a)$$

$$\cos(\omega_0 t) \quad ; \quad \varepsilon_{01} + \frac{1}{2} \varepsilon_{11} + \frac{1}{3} \varepsilon_{21} + \frac{1}{4} \varepsilon_{31} + \frac{1}{5} \varepsilon_{41} = 0 \quad (3.79b)$$

式(3.75a)から  $\gamma_{11}$  は以下のように表される.

$$\gamma_{11} = \frac{dh_0 L \omega_0^2}{gh_0 - \frac{1}{4} d^2 \omega_0^2} = \frac{dh_0}{L} Z \quad (3.80)$$

ここに,  $X$ ,  $Y$ ,  $Z$  は以下のように定義される.

$$X = \frac{L^2 \omega_0^2}{gh_0}, \quad Y = \frac{d^2 \omega_0^2}{gh_0}, \quad Z = X / \left(1 - \frac{1}{4} Y\right)$$

(3.77a), (3.78a) から  $\gamma_{11}$  を消去すると, 式(3.81), (3.82)が導かれる.

$$\gamma_{21} = -\frac{1}{2} Z \gamma_{01} \quad (3.81)$$

$$\gamma_{31} = -\frac{1}{6} \frac{dh_0}{L} Z^2 \quad (3.82)$$

さらに, 式(3.75a)を用いて式(3.76a)を変形すると, 以下ようになる.

$$2\gamma_{21} + 3\gamma_{31} + 4\gamma_{41} = 0 \quad (3.83)$$

ここで、式(3.79a)、式(3.83)に式(3.80)～式(3.82)を代入して整理すると、 $\gamma_{01}$ 、 $\gamma_{41}$ に関する連立方程式が得られる。

$$\left(1 - \frac{1}{6}Z\right)\gamma_{01} + \frac{1}{5}\gamma_{41} = \frac{dh_0}{L}Z\left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{24}Z\right) \quad (3.84)$$

$$-Z\gamma_{01} + 4\gamma_{41} = \frac{1}{2}\frac{dh_0}{L}Z^2 \quad (3.85)$$

従って、 $\gamma_{01}$ 、 $\gamma_{41}$ は以下のように求められる。

$$\gamma_{01} = \frac{dh_0}{L} \frac{-Z^2 + 30Z}{7Z - 60} \quad (3.86)$$

$$\gamma_{41} = \frac{dh_0}{L} \frac{5Z^3}{8(7Z - 60)} \quad (3.87)$$

$\varepsilon$ については以下の式が成り立つ。

$$\varepsilon_{01} = \varepsilon_{11} = \varepsilon_{21} = \varepsilon_{31} = \varepsilon_{41} = 0 \quad (3.88)$$

式(3.80)–(3.82)、(3.86)–(3.88)を式(3.65)と(3.73)に代入すると、水面変動に関する線形解を計算することができる。

### 3.4.3 鉛直加速度を考慮した場合の基礎式系

前項では、圧力分布を静水圧と仮定した浅水流方程式を用いたが、水深に対して波の波長が短くなる（無次元波数が高くなる）と静水圧の仮定は成立しなくなる。そこで本項では、鉛直加速度を考慮した水深積分モデル（Boussinesq 方程式）を基礎式として定式化を示す。Boussinesq 方程式には、分散特性の向上を目的として様々な改良モデルが提案されているが<sup>例えば11)</sup>、本研究では、最も簡単な原形 Boussinesq 方程式を考える。

#### (1) 基礎式

鉛直加速度を考慮した場合の1次元固定座標系での基礎式は以下のとおりである<sup>12)</sup>。なお、連続式は式(3.1)と同じであるため、運動量方程式のみを記述する。

$$\frac{\partial M}{\partial t} + \frac{\partial uM}{\partial x} + \frac{\partial P}{\partial x} = 0 \quad (3.89)$$

$$P = \frac{gh^2}{2} + \frac{1}{3}h \left\{ u^2 h \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + 2uh \frac{\partial^2 h}{\partial x \partial t} + h \frac{\partial^2 h}{\partial t^2} + h \frac{\partial u}{\partial t} \frac{\partial h}{\partial x} + uh \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial h}{\partial x} \right\} \quad (3.90)$$

ここで、式(3.90)右辺第1項のみを考えると、式(3.89)は静水圧を仮定した浅水流方程式と一致する。固定座標系での運動量方程式(3.89)を移動一般座標系に変換すると、以下のように表される。

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{M}{J} \right) + \frac{\partial}{\partial \xi} \left\{ (\xi_t + U) \frac{M}{J} \right\} + \frac{\xi_x}{J} \frac{\partial}{\partial \xi} \left( \frac{gh^2}{2} \right) \\ & + \frac{\partial}{\partial \xi} \left[ -\frac{1}{3}h^2 \xi_x \left\{ \frac{\partial^2}{\partial t \partial \xi} \left( \frac{\xi_x}{J} M \right) + \frac{\partial}{\partial \xi} \left( \frac{\xi_t \xi_x}{J} \frac{\partial M}{\partial \xi} \right) \right\} + \frac{1}{3}h^2 u^2 \xi_x \frac{\partial}{\partial \xi} \left( \frac{\xi_x^2}{J} \frac{\partial h}{\partial \xi} \right) \right] \end{aligned}$$



$$+\frac{2}{3}h^2u\frac{\xi_x^2}{J}\left\{\frac{\partial^2h}{\partial t\partial\xi}+\frac{\partial}{\partial\xi}\left(\xi\frac{\partial h}{\partial\xi}\right)\right\}+\frac{1}{3}h^2\frac{\xi_x^2}{J}\frac{\partial h}{\partial\xi}\left(\frac{\partial u}{\partial t}+\xi\frac{\partial u}{\partial\xi}\right)+\frac{1}{3}h^2u\frac{\xi_x^3}{J}\frac{\partial h}{\partial\xi}\frac{\partial u}{\partial\xi}\right]=0 \quad (3.91)$$

上式にメトリックスの関係式(3.57)を代入すると、式(3.92)が得られる。

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t}(Lhu)+\frac{\partial}{\partial\xi}\left[\{u-d\omega_0\cos(\omega_0t)\}hu\right]+gh\frac{\partial h}{\partial\xi} \\ & +\frac{\partial}{\partial\xi}\left[-\frac{1}{3}h^2\frac{1}{L}\left\{u\frac{\partial^2h}{\partial t\partial\xi}+\frac{\partial u}{\partial t}\frac{\partial h}{\partial\xi}+h\frac{\partial^2u}{\partial\xi\partial t}+\frac{\partial h}{\partial t}\frac{\partial u}{\partial\xi}-\frac{1}{L}d\omega_0\cos(\omega_0t)\left(u\frac{\partial^2h}{\partial\xi^2}+2\frac{\partial u}{\partial\xi}\frac{\partial h}{\partial\xi}+h\frac{\partial^2u}{\partial\xi^2}\right)\right\}\right. \\ & \quad \left.+\frac{1}{3}h^2u^2\frac{1}{L^2}\frac{\partial^2h}{\partial\xi^2}+\frac{2}{3}h^2u\frac{1}{L}\left\{\frac{\partial^2h}{\partial t\partial\xi}-\frac{1}{L}d\omega_0\cos(\omega_0t)\frac{\partial^2h}{\partial\xi^2}\right\}\right. \\ & \quad \left.+\frac{1}{3}h^2\frac{1}{L}\frac{\partial h}{\partial\xi}\left\{\frac{\partial u}{\partial t}-\frac{1}{L}d\omega_0\cos(\omega_0t)\frac{\partial u}{\partial\xi}\right\}+\frac{1}{3}h^2u\frac{1}{L^2}\frac{\partial h}{\partial\xi}\frac{\partial u}{\partial\xi}\right]=0 \end{aligned} \quad (3.92)$$

## (2) 線形解

鉛直加速度を考慮した場合についても同様に線形解を求める。運動量方程式(3.92)に式(3.29)を代入し、 $u_0=0$ とすると、式(3.93)が得られる。

$$L\frac{\partial u'}{\partial t}-d\omega_0\cos(\omega_0t)\frac{\partial u'}{\partial\xi}+g\frac{\partial h'}{\partial\xi}-\frac{1}{3}\frac{h_0}{L}\left\{h_0\frac{\partial^3u'}{\partial\xi^2\partial t}-\frac{1}{L}d\omega_0\cos(\omega_0t)h_0\frac{\partial^3u'}{\partial\xi^3}\right\}=0 \quad (3.93)$$

前項と同様に連続式(3.60)を用いて $u'$ を消去すると、 $h'$ に関する線形方程式が導かれる。

$$\begin{aligned} & L^2\frac{\partial^2h'}{\partial t^2}+\left[\{d\omega_0\cos(\omega_0t)\}^2-gh_0\right]\frac{\partial^2h'}{\partial\xi^2} \\ & -2Ld\omega_0\cos(\omega_0t)\frac{\partial^2h'}{\partial t\partial\xi}+Ld\omega_0^2\sin(\omega_0t)\frac{\partial h'}{\partial\xi}-\frac{1}{3}h_0^2\frac{\partial^4h'}{\partial\xi^2\partial t^2}+\frac{2}{3}\frac{h_0^2}{L}d\omega_0\cos(\omega_0t)\frac{\partial^4h'}{\partial\xi^3\partial t} \\ & -\frac{1}{3}\frac{h_0^2}{L}d\omega_0^2\sin(\omega_0t)\frac{\partial^3h'}{\partial\xi^3}-\frac{1}{3}\frac{h_0^2}{L^2}\{d\omega_0\cos(\omega_0t)\}^2\frac{\partial^4h'}{\partial\xi^4}=0 \end{aligned} \quad (3.94)$$

壁面での境界条件を以下のようにして求める。まず、運動量方程式(3.93)の $\partial u'/\partial t$ に式(3.63)を代入する。また、式(3.93)中の $\partial u'/\partial\xi$ 、 $\partial^3u'/\partial\xi^2\partial t$ 、 $\partial^3u'/\partial\xi^3$ については、連続式(3.60)と式(3.63)を用いてそれぞれの項を消去すると、 $h'$ に関する境界条件式(3.95)が得られる。

$$\begin{aligned} & -dLh_0\omega_0^2\sin(\omega_0t)+dL\omega_0\cos(\omega_0t)\frac{\partial h'}{\partial t}+\left[gh_0-\{d\omega_0\cos(\omega_0t)\}^2\right]\frac{\partial h'}{\partial\xi}+\frac{1}{3}h_0^2\frac{\partial^3h'}{\partial\xi\partial t^2} \\ & -\frac{2}{3}\frac{h_0^2}{L}d\omega_0\cos(\omega_0t)\frac{\partial^3h'}{\partial\xi^2\partial t}+\frac{1}{3}\frac{h_0^2}{L}d\omega_0^2\sin(\omega_0t)\frac{\partial^2h'}{\partial\xi^2}+\frac{1}{3}\frac{h_0^2}{L^2}\{d\omega_0\cos(\omega_0t)\}^2\frac{\partial^3h'}{\partial\xi^3}=0 \end{aligned} \quad (3.95)$$

$h'$ を以下のように設定する。

$$h'=E_0(t)+E_1(t)\xi+E_2(t)\xi^2+E_3(t)\xi^3+E_4(t)\xi^4 \quad (3.96)$$

式(3.96)を式(3.95)に代入すると、境界条件として式(3.97)が得られる。

$$\begin{aligned} & -dLh_0\omega_0^2\sin(\omega_0t)+dL\omega_0\cos(\omega_0t)\left(\frac{dE_0}{dt}+\frac{dE_1}{dt}\xi+\frac{dE_2}{dt}\xi^2+\frac{dE_3}{dt}\xi^3+\frac{dE_4}{dt}\xi^4\right) \\ & +gh_0(E_1+2E_2\xi+3E_3\xi^2+4E_4\xi^3)-d^2\omega_0^2\cos^2(\omega_0t)(E_1+2E_2\xi+3E_3\xi^2+4E_4\xi^3) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{1}{3} h_0^2 \left( \frac{d^2 E_1}{dt^2} \xi + 2 \frac{d^2 E_2}{dt^2} \xi^2 + 3 \frac{d^2 E_3}{dt^2} \xi^3 + 4 \frac{d^2 E_4}{dt^2} \xi^4 \right) + \frac{1}{3} \frac{h_0^2}{L} d\omega_0^2 \sin(\omega_0 t) (2E_2 + 6E_3 \xi + 12E_4 \xi^2) \\
 & - \frac{2}{3} \frac{h_0^2}{L} d\omega_0 \cos(\omega_0 t) \left( 2 \frac{dE_2}{dt} + 6 \frac{dE_3}{dt} \xi + 12 \frac{dE_4}{dt} \xi^2 \right) + \frac{1}{3} \frac{h_0^2}{L^2} d^2 \omega_0^2 \cos^2(\omega_0 t) (6E_3 + 24E_4 \xi) = 0 \quad (3.97)
 \end{aligned}$$

よって、 $\xi=0$  (左壁)、 $\xi=1$  (右壁) の境界条件は、以下のように求められる。

[ $\xi=0$  (左壁)]

$$\begin{aligned}
 & -dLh_0\omega_0^2 \sin(\omega_0 t) + dL\omega_0 \cos(\omega_0 t) \frac{dE_0}{dt} + gh_0 E_1 - d^2 \omega_0^2 \cos^2(\omega_0 t) E_1 + \frac{1}{3} h_0^2 \frac{d^2 E_1}{dt^2} \\
 & - \frac{4}{3} \frac{h_0^2}{L} d\omega_0 \cos(\omega_0 t) \frac{dE_2}{dt} + \frac{2}{3} \frac{h_0^2}{L} d\omega_0^2 \sin(\omega_0 t) E_2 + 2 \frac{h_0^2}{L^2} d^2 \omega_0^2 \cos^2(\omega_0 t) E_3 = 0 \quad (3.98)
 \end{aligned}$$

[ $\xi=1$  (右壁)]

$$\begin{aligned}
 & -dLh_0\omega_0^2 \sin(\omega_0 t) + dL\omega_0 \cos(\omega_0 t) \left( \frac{dE_0}{dt} + \frac{dE_1}{dt} + \frac{dE_2}{dt} + \frac{dE_3}{dt} + \frac{dE_4}{dt} \right) \\
 & + gh_0 (E_1 + 2E_2 + 3E_3 + 4E_4) - d^2 \omega_0^2 \cos^2(\omega_0 t) (E_1 + 2E_2 + 3E_3 + 4E_4) \\
 & + \frac{1}{3} h_0^2 \left( \frac{d^2 E_1}{dt^2} + 2 \frac{d^2 E_2}{dt^2} + 3 \frac{d^2 E_3}{dt^2} + 4 \frac{d^2 E_4}{dt^2} \right) - \frac{2}{3} \frac{h_0^2}{L} d\omega_0 \cos(\omega_0 t) \left( 2 \frac{dE_2}{dt} + 6 \frac{dE_3}{dt} + 12 \frac{dE_4}{dt} \right) \\
 & + \frac{1}{3} \frac{h_0^2}{L^2} d^2 \omega_0^2 \cos^2(\omega_0 t) (6E_3 + 24E_4) = 0 \quad (3.99)
 \end{aligned}$$

また、式(3.94)に式(3.96)を代入すると、式(3.100)を得る。

$$\begin{aligned}
 & L^2 \left( \frac{dE_0}{dt^2} + \frac{dE_1}{dt^2} \xi + \frac{dE_2}{dt^2} \xi^2 + \frac{dE_3}{dt^2} \xi^3 + \frac{dE_4}{dt^2} \xi^4 \right) + d^2 \omega_0^2 \cos^2(\omega_0 t) (2E_2 + 6E_3 \xi + 12E_4 \xi^2) \\
 & - gh_0 (2E_2 + 6E_3 \xi + 12E_4 \xi^2) - 2dL\omega_0 \cos(\omega_0 t) \left( \frac{dE_1}{dt} + 2\xi \frac{dE_2}{dt} + 3\xi^2 \frac{dE_3}{dt} + 4\xi^3 \frac{dE_4}{dt} \right) \\
 & + dL\omega_0^2 \sin(\omega_0 t) (E_1 + 2E_2 \xi + 3E_3 \xi^2 + 4E_4 \xi^3) - \frac{1}{3} h_0^2 \left( 2 \frac{d^2 E_2}{dt^2} + 6 \frac{d^2 E_3}{dt^2} \xi + 12 \frac{d^2 E_4}{dt^2} \xi^2 \right) \\
 & + \frac{2}{3} \frac{h_0^2}{L} d\omega_0 \cos(\omega_0 t) \left( 6 \frac{dE_3}{dt} + 24 \frac{dE_4}{dt} \xi \right) - \frac{1}{3} \frac{h_0^2}{L} d\omega_0^2 \sin(\omega_0 t) (6E_3 + 24E_4 \xi) \\
 & - 8 \frac{h_0^2}{L^2} d^2 \omega_0^2 \cos^2(\omega_0 t) E_4 = 0 \quad (3.100)
 \end{aligned}$$

式(3.100)を $\xi$ の各オーダーで整理し、 $\xi^0$ 、 $\xi^1$ の係数を0とすると、式(3.101)、(3.102)が導かれる。

$$\begin{aligned}
 \xi^0 : \quad & L^2 \frac{d^2 E_0}{dt^2} + 2d^2 \omega_0^2 \cos^2(\omega_0 t) E_2 - 2gh_0 E_2 - 2dL\omega_0 \cos(\omega_0 t) \frac{dE_1}{dt} + dL\omega_0^2 \sin(\omega_0 t) E_1 \\
 & - \frac{2}{3} h_0^2 \frac{d^2 E_2}{dt^2} + 4 \frac{h_0^2}{L} d\omega_0 \cos(\omega_0 t) \frac{dE_3}{dt} - 2 \frac{h_0^2}{L} d\omega_0^2 \sin(\omega_0 t) E_3 \\
 & - 8 \frac{h_0^2}{L} d^2 \omega_0^2 \cos^2(\omega_0 t) E_4 = 0 \quad (3.101)
 \end{aligned}$$

$$\xi^1 : \quad L^2 \frac{d^2 E_1}{dt^2} + 6d^2 \omega_0^2 \cos^2(\omega_0 t) E_3 - 6gh_0 E_3 - 4dL\omega_0 \cos(\omega_0 t) \frac{dE_2}{dt} + 2dL\omega_0^2 \sin(\omega_0 t) E_2$$

$$-2h_0^2 \frac{d^2 E_3}{dt^2} + 16 \frac{h_0^2}{L} d\omega_0 \cos(\omega_0 t) \frac{dE_4}{dt} - 8 \frac{h_0^2}{L} d\omega_0^2 \sin(\omega_0 t) E_4 = 0 \quad (3.102)$$

さらに、体積一定の条件から以下の式が得られる。

$$E_0 + \frac{1}{2}E_1 + \frac{1}{3}E_2 + \frac{1}{4}E_3 + \frac{1}{5}E_4 = 0 \quad (3.103)$$

ここで、 $E_0 \sim E_4$  を以下のようにおく。

$$E_0 = \phi_{01} \sin(\omega_0 t) + \varphi_{01} \cos(\omega_0 t) \quad (3.104a)$$

$$E_1 = \phi_{11} \sin(\omega_0 t) + \varphi_{11} \cos(\omega_0 t) \quad (3.104b)$$

$$E_2 = \phi_{21} \sin(\omega_0 t) + \varphi_{21} \cos(\omega_0 t) \quad (3.104c)$$

$$E_3 = \phi_{31} \sin(\omega_0 t) + \varphi_{31} \cos(\omega_0 t) \quad (3.104d)$$

$$E_4 = \phi_{41} \sin(\omega_0 t) + \varphi_{41} \cos(\omega_0 t) \quad (3.104e)$$

前項と同様に、式(3.104)を式(3.98), (3.99), (3.101), (3.102), (3.103)に代入して、 $\sin(\omega_0 t)$ ,  $\cos(\omega_0 t)$  の係数を 0 とおくと以下の代数方程式が得られる。

式(3.98)より

$$\sin(\omega_0 t) \quad ; \quad -dh_0 L \omega_0^2 + gh_0 \phi_{11} - \frac{1}{4} d^2 \omega_0^2 \phi_{11} - \frac{1}{3} h_0^2 \omega_0^2 \phi_{11} + \frac{1}{2} \frac{h_0^2}{L^2} d^2 \omega_0^2 \phi_{31} = 0 \quad (3.105a)$$

$$\cos(\omega_0 t) \quad ; \quad gh_0 \varphi_{11} - \frac{3}{4} d^2 \omega_0^2 \varphi_{11} - \frac{1}{3} h_0^2 \omega_0^2 \varphi_{11} + \frac{3}{2} \frac{h_0^2}{L^2} d^2 \omega_0^2 \varphi_{31} = 0 \quad (3.105b)$$

式(3.99)より、

$$\begin{aligned} \sin(\omega_0 t) \quad ; \quad & -dh_0 L \omega_0^2 + gh_0 (\phi_{11} + 2\phi_{21} + 3\phi_{31} + 4\phi_{41}) - \frac{1}{4} d^2 \omega_0^2 (\phi_{11} + 2\phi_{21} + 3\phi_{31} + 4\phi_{41}) \\ & - \frac{1}{3} h_0^2 \omega_0^2 (\phi_{11} + 2\phi_{21} + 3\phi_{31} + 4\phi_{41}) + \frac{1}{12} \frac{h_0^2}{L^2} d^2 \omega_0^2 (6\phi_{31} + 24\phi_{41}) = 0 \end{aligned} \quad (3.106a)$$

$$\begin{aligned} \cos(\omega_0 t) \quad ; \quad & gh_0 (\varphi_{11} + 2\varphi_{21} + 3\varphi_{31} + 4\varphi_{41}) - \frac{3}{4} d^2 \omega_0^2 (\varphi_{11} + 2\varphi_{21} + 3\varphi_{31} + 4\varphi_{41}) \\ & - \frac{1}{3} h_0^2 \omega_0^2 (\varphi_{11} + 2\varphi_{21} + 3\varphi_{31} + 4\varphi_{41}) + \frac{1}{4} \frac{h_0^2}{L^2} d^2 \omega_0^2 (6\varphi_{31} + 24\varphi_{41}) = 0 \end{aligned} \quad (3.106b)$$

式(3.101)より、

$$\sin(\omega_0 t) \quad ; \quad -L^2 \omega_0^2 \phi_{01} + \frac{1}{2} d^2 \omega_0^2 \phi_{21} - 2gh_0 \phi_{21} + \frac{2}{3} h_0^2 \omega_0^2 \phi_{21} - 2 \frac{h_0^2}{L^2} d^2 \omega_0^2 \phi_{41} = 0 \quad (3.107a)$$

$$\cos(\omega_0 t) \quad ; \quad -L^2 \omega_0^2 \varphi_{01} + \frac{3}{2} d^2 \omega_0^2 \varphi_{21} - 2gh_0 \varphi_{21} + \frac{2}{3} h_0^2 \omega_0^2 \varphi_{21} - 6 \frac{h_0^2}{L^2} d^2 \omega_0^2 \varphi_{41} = 0 \quad (3.107b)$$

式(3.102)より、

$$\sin(\omega_0 t) \quad ; \quad -L^2 \omega_0^2 \phi_{11} + \frac{3}{2} d^2 \omega_0^2 \phi_{31} - 6gh_0 \phi_{31} + 2h_0^2 \omega_0^2 \phi_{31} = 0 \quad (3.108a)$$

$$\cos(\omega_0 t) \quad ; \quad -L^2 \omega_0^2 \varphi_{11} + \frac{9}{2} d^2 \omega_0^2 \varphi_{31} - 6gh_0 \varphi_{31} + 2h_0^2 \omega_0^2 \varphi_{31} = 0 \quad (3.108b)$$

式(3.103)より,

$$\sin(\omega_0 t) ; \quad \phi_{01} + \frac{1}{2}\phi_{11} + \frac{1}{3}\phi_{21} + \frac{1}{4}\phi_{31} + \frac{1}{5}\phi_{41} = 0 \quad (3.109a)$$

$$\cos(\omega_0 t) ; \quad \varphi_{01} + \frac{1}{2}\varphi_{11} + \frac{1}{3}\varphi_{21} + \frac{1}{4}\varphi_{31} + \frac{1}{5}\varphi_{41} = 0 \quad (3.109b)$$

上記の式(3.105)–(3.109)より係数 $\phi$ ,  $\varphi$ について解くと, 以下のように求められる.

$$\begin{aligned} \phi_{01} = & \frac{1}{4} \frac{dh_0}{L} \frac{X}{ABC} P \left[ C \left\{ P \left( \frac{2}{5} X + 3Y - 12 + 4 \frac{h_0^2}{L^2} X + 6 \frac{h_0^2}{L^2} Y \right) + \frac{1}{2} \frac{h_0^2}{L^2} Y \left( X + 3Y - 12 + 4 \frac{h_0^2}{L^2} X \right) \right\} \right. \\ & + 2 \frac{h_0^2}{L^2} Y \left\{ \left( \frac{7}{30} X + \frac{1}{2} Y - 2 + \frac{2}{3} \frac{h_0^2}{L^2} X + \frac{h_0^2}{L^2} Y \right) \left( X + 3Y - 12 + 4 \frac{h_0^2}{L^2} X \right) \right. \\ & \left. \left. - \left( \frac{2}{5} X + 3Y - 12 + 4 \frac{h_0^2}{L^2} X + 6 \frac{h_0^2}{L^2} Y \right) \left( \frac{1}{3} X + \frac{1}{2} Y - 2 + \frac{2}{3} \frac{h_0^2}{L^2} X \right) \right\} \right] \quad (3.110a) \end{aligned}$$

$$\phi_{11} = \frac{dh_0}{L} \frac{X}{A} \left( \frac{3}{2} Y - 6 + 2 \frac{h_0^2}{L^2} X \right) \quad (3.110b)$$

$$\phi_{21} = -\frac{1}{4} \frac{dh_0}{L} \frac{X^2}{AB} \left\{ P \left( \frac{2}{5} X + 3Y - 12 + 4 \frac{h_0^2}{L^2} X + 6 \frac{h_0^2}{L^2} Y \right) + \frac{1}{2} \frac{h_0^2}{L^2} Y \left( X + 3Y - 12 + 4 \frac{h_0^2}{L^2} X \right) \right\} \quad (3.110c)$$

$$\phi_{31} = \frac{dh_0}{L} \frac{X^2}{A} \quad (3.110d)$$

$$\begin{aligned} \phi_{41} = & -\frac{1}{4} \frac{dh_0}{L} \frac{X^2}{ABC} P \left\{ \left( \frac{7}{30} X + \frac{1}{2} Y - 2 + \frac{2}{3} \frac{h_0^2}{L^2} X + \frac{h_0^2}{L^2} Y \right) \left( X + 3Y - 12 + 4 \frac{h_0^2}{L^2} X \right) \right. \\ & \left. - \left( \frac{2}{5} X + 3Y - 12 + 4 \frac{h_0^2}{L^2} X + 6 \frac{h_0^2}{L^2} Y \right) \left( \frac{1}{3} X + \frac{1}{2} Y - 2 + \frac{2}{3} \frac{h_0^2}{L^2} X \right) \right\} \quad (3.110e) \end{aligned}$$

$$\varphi_{01} = \varphi_{11} = \varphi_{21} = \varphi_{31} = \varphi_{41} = 0 \quad (3.110f)$$

ここに,

$$X = \frac{L^2 \omega_0^2}{gh_0}, \quad Y = \frac{d^2 \omega_0^2}{gh_0}, \quad P = 1 - \frac{1}{4} Y - \frac{1}{3} \frac{h_0^2}{L^2} X,$$

$$A = P \left( \frac{3}{2} Y - 6 + 2 \frac{h_0^2}{L^2} X \right) + \frac{1}{2} \frac{h_0^2}{L^2} XY,$$

$$B = P \left( \frac{7}{30} X + \frac{1}{2} Y - 2 + \frac{2}{3} \frac{h_0^2}{L^2} X + \frac{h_0^2}{L^2} Y \right) + \frac{1}{2} \frac{h_0^2}{L^2} Y \left( \frac{1}{3} X + \frac{1}{2} Y - 2 + \frac{2}{3} \frac{h_0^2}{L^2} X \right),$$

$$C = \frac{1}{5} X - 2 \frac{h_0^2}{L^2} Y$$

で表される. 式(3.110)を式(3.96), (3.104)に代入すると, 鉛直加速度を考慮した場合の線形解を計算することができる.

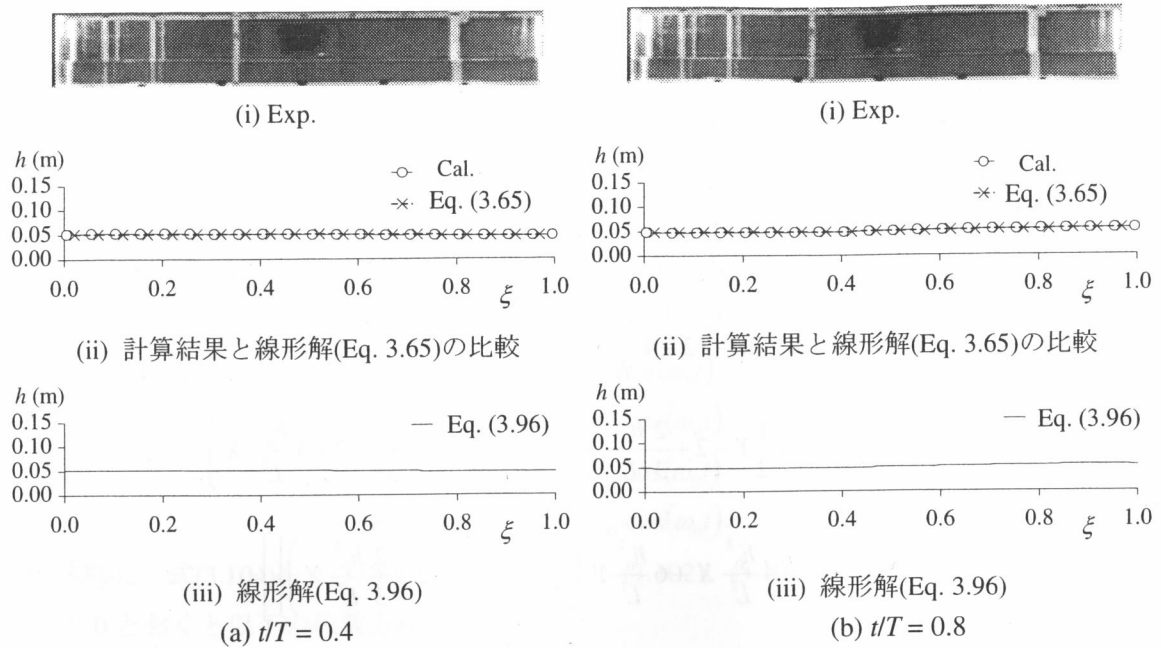


図-3.33 水面形の時間変化 (Case. 1)

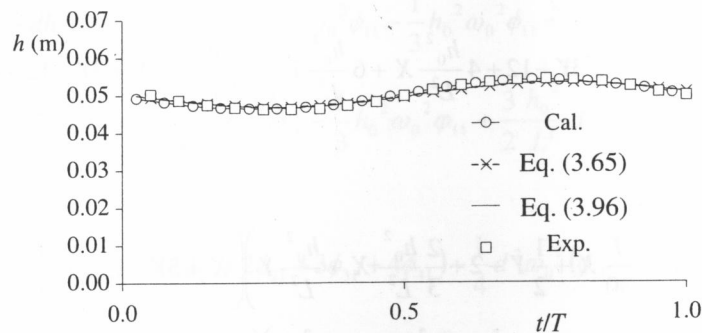


図-3.34 固定点での水深の時間変化 (Case. 1)

#### 3.4.4 考察

振動振幅、周波数が小さい場合の水面形、および固定点での水深の時間変化を示したものが図-3.33, 3.34 である。水面形の時間変化をみると、計算結果と線形解は適合しており、浅水流方程式と鉛直加速度を考慮した場合の線形解は一致している。また、計算結果、線形解とも実験結果と適合していることがわかる。

一方、振動振幅が大きい場合について水面形、固定点での時間変化を示したものが図-3.35, 3.36 である。この場合、静水圧を仮定した線形解(3.65)と鉛直加速度を考慮した線形解(3.96)はほぼ一致しているが、計算結果と線形解は適合しておらず、計算結果のほうが実験結果を再現していることがわかる。従って、振幅が大きく Case.1 よりも非線形性が強いため、線形解は適合しないと考えられる。

図-3.37, 3.38 は初期水深が大きい場合について、線形解の水面形の時間変化、固定点での水深の時間変化を比較したものである。このケースでは、振動振幅が小さく、上述の Case. 1 の検討から浅水流方程式の数値解析と線形解はほぼ一致すると考えられるため、線形解と実験結果の比較

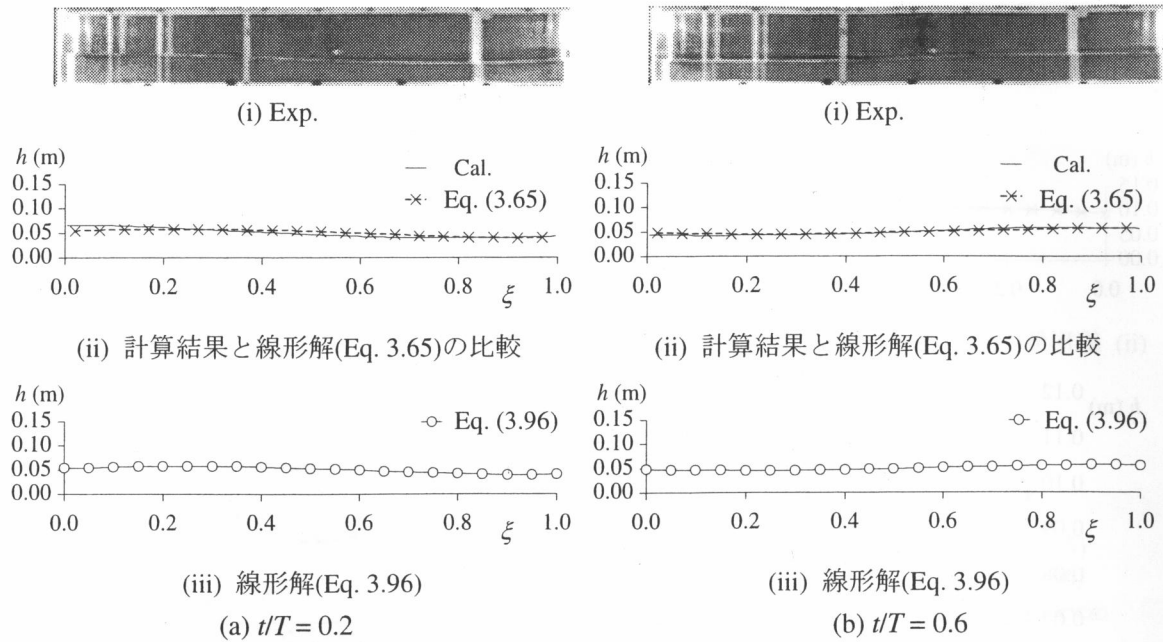


図-3.35 水面形の時間変化 (Case. 2)

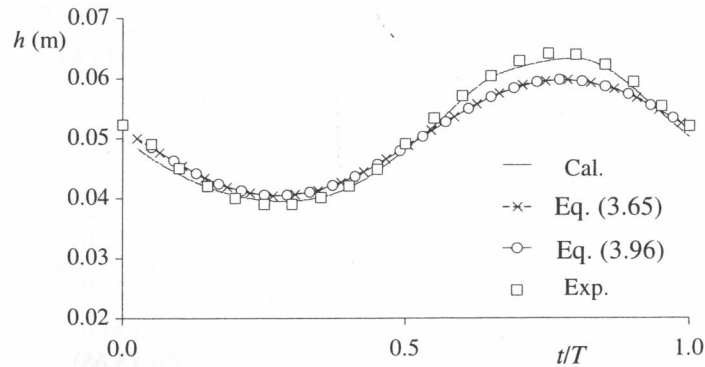


図-3.36 固定点での水深の時間変化 (Case. 2)

を試みる。図をみると、浅水流方程式と鉛直加速度を考慮した場合とで水面形に違いが見られ、鉛直加速度を考慮した場合の方が実験結果を再現していることがわかる。これは、初期水深が大きく、波数が高くなるため、静水圧仮定が成立しなくなり、鉛直加速度項の影響が大きくなったと考えられる。なお本研究では、線形解の水深分布を $\xi$ の4次関数で与えている。波数が高く、水深が大きい場合を検討するには、さらに高次の項を考慮する必要があると考えられる。この点については、今後の検討課題としたい。

次に、浅水流方程式の線形解における水深分布(3.65)の係数である式(3.80)–(3.82), (3.86), (3.87)の分母を0にすると、水面の振動振幅と無次元角振動数に関する共鳴関係が以下のように導かれる。

$$7P - 60 = 0$$

そこで、水槽の長さ  $L = 1.0(\text{m})$ 、初期水深  $h_0 = 0.1(\text{m})$ 、振幅  $d$  を小さい場合の  $0.01(\text{m})$  として、共鳴点を示す無次元角振動数を求めると、次のようになる。

$$X \approx 8.6$$

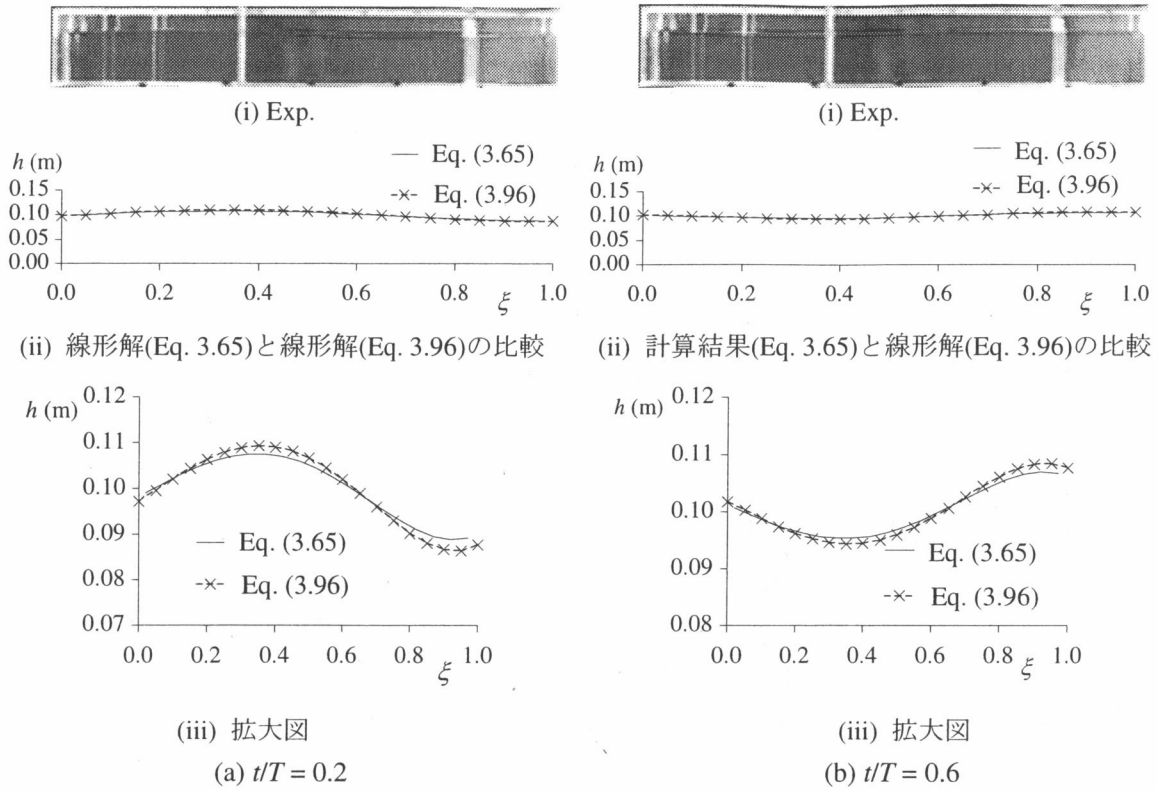


図-3.37 水面形の時間変化 (Case. 4)

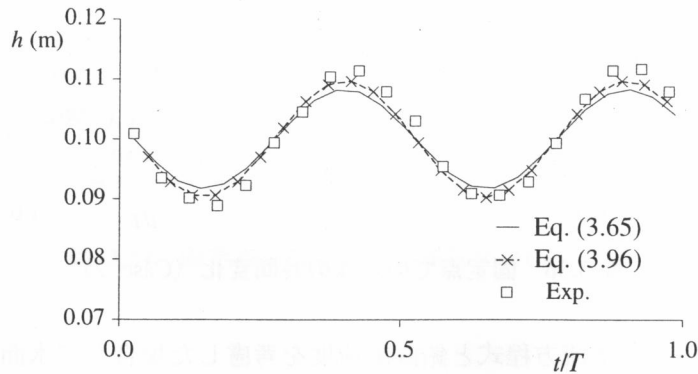


図-3.38 固定点での水深の時間変化 (Case. 4)

一方、鉛直加速度を考慮した場合についても同様に、

$$A = P \left( \frac{3}{2} Y - 6 + 2 \frac{h_0^2}{L^2} X \right) + \frac{1}{2} \frac{h_0^2}{L^2} XY = 0$$

$$B = P \left( \frac{7}{30} X + \frac{1}{2} Y - 2 + \frac{2}{3} \frac{h_0^2}{L^2} X + \frac{h_0^2}{L^2} Y \right) + \frac{1}{2} \frac{h_0^2}{L^2} Y \left( \frac{1}{3} X + \frac{1}{2} Y - 2 + \frac{2}{3} \frac{h_0^2}{L^2} X \right) = 0$$

から、共鳴関係が得られ、水槽の長さ、初期水深、振動振幅を代入すると、 $X \leq 36$  の領域で共鳴点の無次元角振動数が以下のように求められる。

$$X \approx 8.3$$

共鳴関係について線形解と数値解析結果を比較し、考察を行う。数値解析については、水槽の長さ、初期水深、振幅を上記と同条件の 1.0(m)、0.1(m)、0.01(m)とし、角振動数 $\omega_0$ を変化させた。

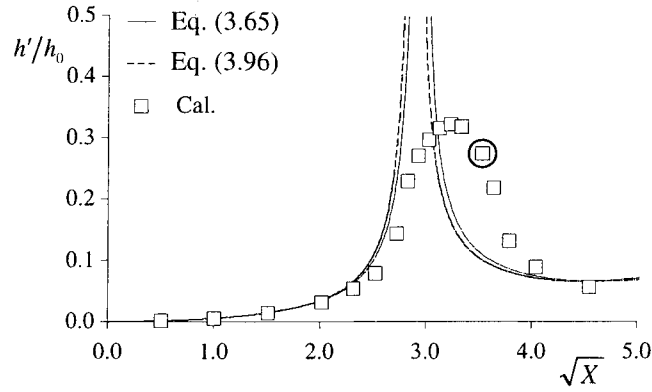


図-3.39 壁の振動数に対する水面振動振幅の変化

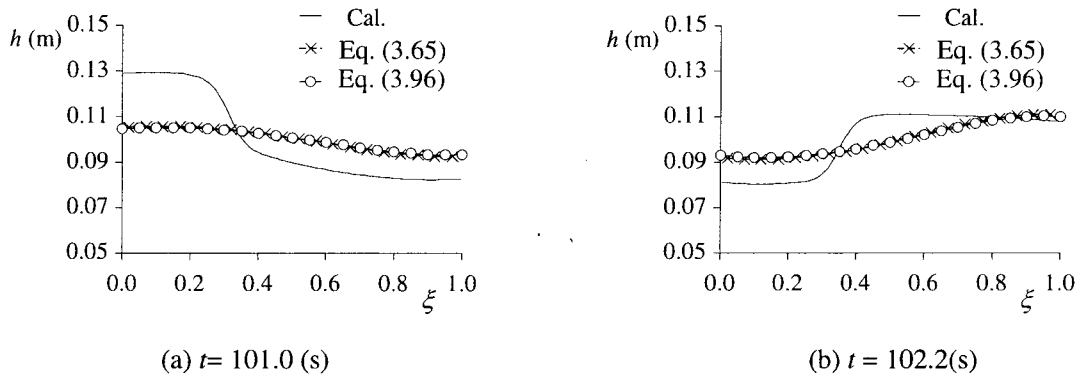
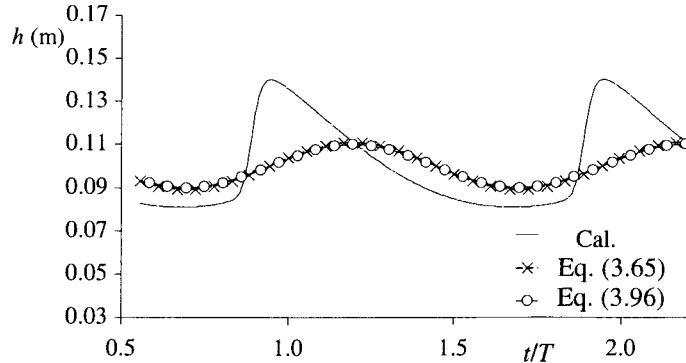

 図-3.40 水面形の時間変化 ( $T = 1.8\text{s}$ )

 図-3.41 右端壁での水深の時間変化 ( $T = 1.8\text{s}$ )

図-3.39 は、横軸に  $\sqrt{X}$ 、縦軸に初期水深で無次元化された右端壁での振幅をとり、計算結果と線形解についてまとめたものである。ここで実験の Case4 では、 $\sqrt{X} \approx 6.3$  となる。図をみると、 $\sqrt{X}$  が小さい領域では、ゆっくり振動するため、無次元波数は小さく、静水圧の場合と鉛直加速度を考慮した場合の線形解は一致している。しかし、 $\sqrt{X}$  が大きくなると、無次元波数が大きくなり、両者の振動振幅は若干異なってくる。また、 $\sqrt{X}$  が小さい領域では、計算結果と線形解はほぼ一致しているが、共鳴点近傍である  $\sqrt{X} \geq 2.5$  において適合していない。そこで、振動周期  $T = 1.8\text{s}$  ( $\sqrt{X} \approx 3.5$ , 図中の○印) の場合について、計算結果と線形解を比較し、適合しない理由を考察する。図-3.40, 3.41 は、水面形及び右壁水深の時系列を示したものである。ここでの時刻は、計



算の時間を表している。水面形の時間変化をみると、計算結果は段波の水面形を示しており、このような水面形を線形解で表現することはできないため、計算結果と線形解の水面形が異なっている。また、右壁における水深の時間変化をみると、ひずみがみられる。従って、非線形性の影響によって両者がずれるのではないかと考えられる。

### 3.5 結語

本章では、水槽の境界形状が変化する場合の水槽内の流体挙動を対象に、移動一般座標系での水深積分モデルを用いて検討した。以下に、本章で得られた結論をまとめる。

3.2 では、一定加速度場に置かれた水槽内の水面挙動について検討した。

- (1) 初期の水面形時間変化について特性曲線法より解析解を求め、左右両壁面から水面が変化し、中央に及ぶ様子が確認された。また、その後の水面挙動に関して浅水流方程式による数値解析を行い、加速度が小さい場合、水面が振動することを示した。さらに、水面形を直線分布で近似した簡易モデルを誘導し、数値解析結果との比較を行った。その結果、水面変動の振幅については、両者でほぼ一致した。
- (2) 加速度が大きくなると、水槽内に流体のない部分が現れ、時間の経過とともに水面がある一定の位置で固定されることが分かった。

次に 3.3 では、水槽の壁が一定速度で移動する場合、或いは一定周期で振動する場合の水槽内の水面挙動について検討した。

- (1) 水槽の壁が一定速度で移動する場合の水面挙動について、浅水流方程式を用いて数値解析を行った。その結果、壁面の移動速度が  $\sqrt{gh_0}$  を超えない場合、超える場合とも、時間の経過とともに段波が進んでいく様子が確認された。しかし、その形状には違いが見られ、これは壁の移動による運動量輸送の大きさが異なるためではないかと考えられる。
- (2) 段波上流部の波高に関して理論的求め、壁の移動速度が小さい場合には運動量輸送も小さく、式(3.25)を導く際の仮定が成立するため計算結果と解析値が一致した。
- (3) 水槽の壁が振動する場合について、浅水流方程式による数値解析を行うとともに、線形解を誘導した。その結果、壁面の振動振幅が小さく、角振動数が小さい場合、計算結果と線形解は一致した。
- (4) 線形解から水面の振動振幅と壁面の角振動数に関する共鳴関係が得られた。壁の振動振幅を固定し、角振動数を変化させる数値実験を行うと、初期水深  $h_0 = 0.1\text{m}$ 、水槽の長さ  $L = 1.0\text{m}$ 、壁の振動振幅  $d_w = 0.02\text{m}$  の条件では、無次元角振動数が 1.5 付近と共鳴点近傍で計算結果と線形解が一致しなかった。その理由として、無次元角振動数が 1.5 付近では計算結果に高周波の波形が見られるが、線形解では時間のモードに壁面の振動数と同じように

仮定したことが考えられる。一方、共鳴点近傍では、計算結果の水面形及び水深の時間変化においてひずみが見られることから非線形性によるためではないかと考えられる。

最後に 3.4 では、振動台上の水槽内流体振動について検討した。

- (1) 振動台上の水槽内流体振動について水理実験を行い、水面挙動について整理した。また、浅水流方程式による数値解析、線形解を求めるとともに鉛直加速度を考慮した場合についても線形解を計算した。振動振幅、周波数が小さい場合、計算結果と線形解はほぼ一致しており、また実験結果とも適合した。振動振幅が大きい場合、非線形性が強いため、計算結果のほうが実験結果を再現した。
- (2) 一方、初期水深が大きい場合、浅水流方程式と鉛直加速度を考慮した場合の線形解とで水面形に違いが見られ、鉛直加速度を考慮した場合の方が実験結果と適合することを示した。
- (3) 前節と同様、線形解から水面の振動振幅と壁面の角振動数に関する共鳴関係を求めた。その結果、初期水深  $h_0 = 0.1\text{m}$ 、水槽の長さ  $L = 1.0\text{m}$ 、水槽の振動振幅  $d = 0.01\text{m}$  の条件において、無次元角振動数が小さい領域では、静水圧仮定の場合と鉛直加速度を考慮した場合の線形解は一致した。しかし、無次元角振動数が大きくなると、両者の振動振幅には、違いが見られた。また、計算結果と線形解は共鳴点近傍において適合しなかった。その理由として、計算結果は段波のような水面形を示しており、水深の時間変化を見てもひずみが見られるため、非線形性の影響によって両者がずれるのではないかと考えられる。

今後、鉛直加速度を考慮した場合について数値解析を行い、モデルの適用限界について考察したい。

## 参考文献

- 1) 木村一郎, 細田 尚, 音田慎一郎: 非線形  $k-\epsilon$ モデルによる斜め越流型水制周辺の三次元流況に関する数値解析, 応用力学論文集, 第6号, pp.717-726, 2002.
- 2) Nagata, N., Hosoda, T., Nakato T. and Muramoto, Y.: 3D numerical simulation of flow and local scour around a cylindrical pier, *J. Hydrosoci. and Hydraulic Eng.*, vol.19, No.2, pp.113-125, 2002.
- 3) 細田 尚, 長田信寿, 村本嘉雄: 移動一般座標系による開水路非定常流の数値解析, 土木学会論文集 No.553/II-34, pp.267-272, 1996.
- 4) 清水康行, 平野道夫, 渡邊康玄: 河岸侵食と自由蛇行の数値解析, 水工学論文集, 第40巻, pp.921-926, 1996.
- 5) Nagata, N., Hosoda, T. and Muramoto, Y.: Numerical analysis of river channel processes with bank erosion, *J. Hydraulic Eng.*, ASCE, vol.26, No.4, pp.243-252, 2000.
- 6) 細田 尚, 音田慎一郎, 浜崎宏正: 移動一般座標系での浅水流方程式の数値解析法とその検

- 証, 応用力学論文集, Vol.6, pp.873-882, 2003.
- 7) 音田慎一郎, 細田 尚, 三浦倫秀: 移動一般座標系での水深積分モデルを用いた水槽内流体振動解析, 応用力学論文集, Vol.7, pp.1023-1032, 2004.
  - 8) 朝位孝二, 細田 尚: 移流方程式の数値解析, 水工学における計算機利用の講習会講義集(土木学会水理委員会基礎水理部会), pp.13-22, 1999.
  - 9) 細田 尚, 朝位孝二: ダム破壊流れの 1 次元解析, 水工学における計算機利用の講習会講義集(土木学会水理委員会基礎水理部会), pp.23-31, 1999.
  - 10) 藤井孝蔵: 流体力学の数値計算法, 東京大学出版会, 1984.
  - 11) 音田慎一郎, 細田 尚, 木村一郎: 鉛直加速度を考慮した水深積分モデルの改良と多次元数値解析結果を用いた検証について, 水工学論文集第 46 巻, pp. 589-594, 2002.
  - 12) 細田 尚, 岩佐義朗: 開水路における波動の分散性, 第 26 回水理講演会論文集, pp. 401-407, 1982.

## 第4章 小規模河床波の発生・発達過程と 流れの抵抗則の数値解析

### 4.1 概説

河床には、流れの状態に応じて種々の河床波が生じる。河床波はそのスケールに応じて中規模河床波と小規模河床波に分類されるが、対象とする河床形態によって河川工学的な意義が異なる。中規模河床波が発達すると、河岸に沿って局所的な深掘れ、堆積が生じ、護岸や根固め等の河川構造物が被災する原因となるため、その挙動の把握が必要となる。中規模河床波の発生に関しては、静水圧を仮定した通常の水深積分モデルと平衡流砂モデルを用いた線形安定解析から水理条件によって微小擾乱が不安定になることが示され<sup>1)</sup>、これらの基礎式の組み合わせによって交互砂州、複列砂州の数値解析が行われている<sup>2,3,4)</sup>。一方、本研究で対象とする小規模河床波が生じると、その形態によって流れに及ぼす影響が異なるため、流れに対する抵抗も変化する。このような河床波の発生・発達或いは遷移に伴う流れの抵抗変化については、抵抗予測という観点から河川工学的に重要なものであり、従来より数多くの研究が行われてきた。

河床波の発生・発達過程などを数値的に再現するには、まず河床波上の流れを精度よく予測する必要がある。河床波上や河道蛇行部では、一般に流れの加速・減速が生ずることが考えられ、このような流れ場を水深積分モデルを用いて解析する場合には、流速分布形の変化をできるだけモデルに考慮し、運動量方程式中の底面せん断応力項などを的確に評価する必要がある。そこで、加速・減速流の流れ特性の解明、底面せん断応力の評価法について実験的、理論的研究が行われている<sup>5,6,7,8)</sup>。

Song&Graf<sup>5)</sup>、瀬津ら<sup>7,8)</sup>は、粗面または滑面上の加速・減速流を超音波ドップラー流速計(ADV)、レーザー流速計(LDA)を用いて計測し、加速流と減速流では平均流速、乱れ強さおよびレイノル

ズ応力の分布特性が等流の分布と異なることを指摘している。さらに、Song&Graf は摩擦速度、レイノルズ応力の評価方法について理論的に考察し、禰津らは種々の摩擦速度の算定方法について比較を行っている。ここで、加速・減速流の流速分布、摩擦速度を求める方法として、対数則、あるいはべき乗則による方法が検討されているが、対数則を用いる方法は、水深積分モデルへの適用が困難であり、また、べき乗則を適用した Song&Graf の方法では、圧力勾配が変化してもべき乗数を一定としているため、加速・減速流の流速分布特性を再現できない。

一方、河床波上、或いは波状路床上流れの底面せん断応力の評価について様々な考察が行われている。Kennedy<sup>9)</sup>、林<sup>10)</sup>は流れをポテンシャル流として扱い、河床波の発生過程に関する線形不安定解析を行い、路床近傍の流速と流砂量の位相差を導入することにより河床波の発生を説明している。また、Nakagawa&Tsujiimoto<sup>11)</sup>は位相差の水理学的意味を明らかにするとともに、流速と底面せん断応力との位相差がポテンシャル流解析から得られる局所流速に加速・減速効果を考慮することで評価できることを示している。また、細田ら<sup>12)</sup>は上記の方法を発展させ、加速・減速効果を表す項に路床の波形勾配を付加することで、波状路床上流れの底面せん断力分布が再現できることを指摘している。

小規模河床波の発生・発達過程、流れの抵抗則という観点からも、数多くの研究が行われてきた。発達過程に関する実験的研究の一つとして中川・辻本<sup>13,14)</sup>の研究が挙げられる。彼等は、平坦河床から河床波が形成される過程について波数スペクトルの時間的变化を調べ、発生過程において生じたスペクトルピークが発達にともなって低波数側へ移行すること、平衡状態に達するといわゆる「-3乗則」が成立することを指摘している。

また、流れの抵抗則に関する研究として、Engelund<sup>15)</sup>の研究がある。彼は、抵抗の相似仮説と河床形態の概念を導入し、同一の河床形態をもつ流れにおいて、土砂輸送に用いられる有効せん断力が全せん断力の関数になることを表した。さらに、実験結果を整理することで、全せん断力と有効せん断力の関係を導いている。岸・黒木<sup>16)</sup>は、Engelund の概念を発展させ、有効せん断力が全せん断力と相対水深の関数になると修正している。また、山口・泉<sup>17)</sup>は、河床波の遷移過程に見られる全抵抗と摩擦抵抗の間の二価性について1つの流量に対して2つの河床形状が存在するという観点から、砂堆の弱非線形安定解析を行い、理論的に説明している。

一方、細田ら<sup>18)</sup>は、鉛直加速度を考慮した開水路流れの水深積分モデルと非平衡流砂モデルを用いて、砂堆の発生・発達過程から平衡状態に至るまでの再現計算を行っている。しかし、砂堆の形成機構、或いは砂堆の発達に伴う抵抗増加については明らかにされていない。

そこで4.2では、河床波上や河道蛇行部などで生じる流れの加速・減速をモデルに反映させることを目的とし、加速・減速流の流速分布に関する簡易モデルの開発と水深積分モデルへの適用について検討する<sup>19,20)</sup>。まず、等流の流速分布形を理論的に求めた Engelund モデル<sup>21)</sup>を応用し、流れの加速・減速をモデルに導入するため、移流項を加えた運動方程式から加速・減速流の流速分布に関する簡易モデルを誘導する。次に、導かれたモデルを従来の実験結果と比較することで、簡易モデルの検証を行う。さらに、水深積分モデルへ適用する際の底面せん断応力項の評価について考察するため、従来波状路床上流れで用いられている評価式と簡易モデルによる評価式を比較し、従来用いられている評価式の有効性を示す。

表-4.1 Song&Graf の実験の水理量

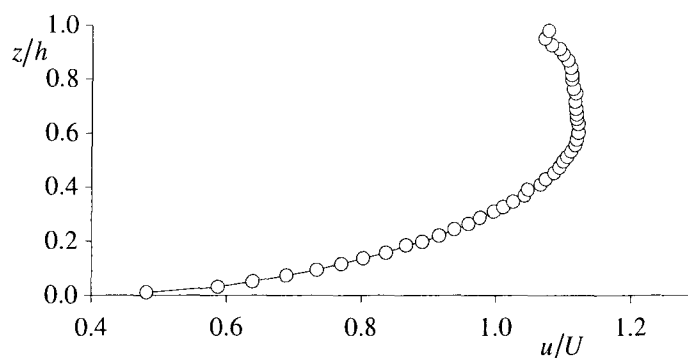
Exp.	$S$ %	$Q$ l/s	$h$ cm	$\delta$ cm	$U$ cm/s	$Fr$	$Re$ ( $\times 10^5$ )	$u_{*c}$ cm/s	$u_*$ cm/s	$u_{*r}$ cm/s	$dh/dx$	$\beta$
AS00-Q145	0	145	20.0	14.12	120.83	0.86	2.50	9.24	9.30	9.70	-0.0170	-3.86
AS00-Q100	0	100	16.2	13.72	102.88	0.82	1.72	8.05	8.00	8.23	-0.0122	-3.03
AS00-Q80	0	80	14.5	12.13	91.95	0.77	1.38	7.21	7.16	7.55	-0.0090	-2.50
AS25-Q100	-0.25	100	16.9	12.92	98.62	0.77	1.73	8.26	7.91	7.89	-0.0160	-3.58
AS25-Q80	-0.25	80	15.1	12.13	88.30	0.73	1.38	7.36	7.28	7.36	-0.0130	-2.87
AS25-Q60	-0.25	60	13.1	10.54	76.34	0.67	1.04	7.12	6.68	7.54	-0.0118	-2.68
AS50-Q110	-0.50	110	17.9	12.13	102.42	0.77	1.89	7.32	7.68	8.05	-0.0200	-4.47
AS50-Q80	-0.50	80	15.9	12.13	83.86	0.67	1.37	6.86	6.90	6.85	-0.0146	-3.15
AS75-Q100	-0.75	100	18.2	11.73	91.58	0.69	1.73	7.45	7.20	7.42	-0.0200	-4.31
AS75-Q80	-0.75	80	16.5	11.73	80.81	0.64	1.38	6.54	6.46	7.17	-0.0170	-3.69
AS93-Q100	-0.93	100	19.0	12.13	87.72	0.64	1.73	7.14	6.85	6.52	-0.0205	-4.45
AS93-Q80	-0.93	80	17.2	11.33	77.52	0.60	1.38	6.96	6.30	6.80	-0.0189	-4.08
DS25-Q90	0.25	90	20.0	20.0	75.00	0.54	1.56	5.19	5.12	4.95	0.0016	-0.69
DS25-Q70	0.25	70	16.0	16.0	72.92	0.58	1.21	5.07	5.04	4.72	0.0013	-0.71
DS50-Q90	0.50	90	18.5	18.5	81.08	0.60	1.55	6.84	6.91	6.54	0.0038	-0.456
DS50-Q70	0.50	70	16.5	16.5	70.71	0.56	1.21	6.20	5.86	6.28	0.0038	-0.566
DS50-Q55	0.50	55	14.5	14.5	63.22	0.53	0.95	5.68	5.20	5.53	0.0038	-0.631
DS75-Q80	0.75	80	20.5	20.5	65.04	0.46	1.38	5.04	4.95	5.07	0.0079	0.330
DS75-Q60	0.75	60	17.0	17.0	58.82	0.46	1.04	4.96	4.91	4.97	0.0076	0.070
DS90-Q80	0.90	80	18.0	18.0	74.07	0.56	1.38	6.58	6.42	6.52	0.0095	0.214
DS90-Q70	0.90	70	18.0	18.0	64.81	0.49	1.21	5.45	5.30	5.36	0.0096	0.337

続く 4.3 では、小規模河床波の発生・発達過程と流れの抵抗則を再現できる数値解析モデルの構築を試みる<sup>22,23)</sup>。流れの基礎式には、実用性の観点から水深積分モデルを適用し、細田ら<sup>18)</sup>のモデルを発展させる。小規模河床波の発生・発達過程に関する数値解析を行い、発達過程における非定常特性、平衡状態での河床波の形状特性、流れの抵抗則に関して、従来の研究と詳細に比較することにより、モデルの適用性を検討する。

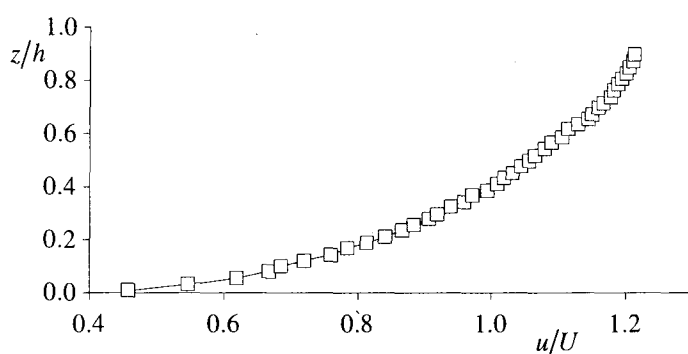
## 4.2 加速・減速流の流速分布の簡易モデルと底面せん断応力の評価

### 4.2.1 加速・減速流に関する実験結果の考察

Song&Graf<sup>5)</sup>は、長さ 16.8m、幅 0.6m、高さ 0.8m の可変勾配水路において、粗面での加速・減速流を超音波ドップラー流速計により計測している。実験条件とその水理量を表-4.1 に示す。表の水理量は、流れが十分に発達し、平衡状態に達した断面での計測結果である。ここに、 $S$ ：路床勾配、 $Q$ ：流量、 $h$ ：水深、 $\delta$ ：路床から最大流速点までの距離、 $U$ ：断面平均流速、 $Fr$ ：フルード



(a) AS93-Q100



(b) DS90-Q70

図-4.1 主流方向流速分布に関する実験結果

数,  $Re$ : レイノルズ数,  $u_{*c}$ : St.Venant 方程式から計算される摩擦速度( $\sqrt{gh\{S - dh/dx(1 - Fr^2)\}}$ ),  $u_{*}$ : Clauser 法による摩擦速度,  $u_{*\tau}$ : レイノルズ応力分布から算出される摩擦速度,  $dh/dx$ : 水深勾配,  $\beta$ : 無次元圧力勾配パラメータ( $\rho gh(-S + dh/dx)/\tau_{bx}$ ),  $\rho$ : 水の密度,  $g$ : 重力加速度である.

図-4.1 は, 加速・減速が最も強いケースでの主流方向流速  $u$  について実験結果を示したものである. Song&Graf は, 減速流の場合の流速分布が加速流に比べてやせた分布を示すこと, 最大流速点の dip が起こらないことを指摘している. 棚津ら<sup>7)</sup>の計測においても同様な傾向が示されている.

## 4.2.2 簡易モデル

### (1) 加速・減速効果を考慮した流速分布の誘導

まず, 定常等流での運動方程式(4.1)から主流方向流速分布を誘導した Engelund モデル<sup>21)</sup>を簡単に紹介する. 座標系は路床に沿うように  $x$  軸, 路床と直交方向に  $z$  軸をとる.

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial \tau}{\partial z} = -g \sin \theta \quad (4.1)$$

ここに,  $\tau$ : セン断応力,  $\theta$ : 路床勾配である.

渦動粘性係数  $\epsilon$  を一定とし, セン断応力を以下のように仮定すると, 式(4.1)は式(4.3)となる. なお, 渦動粘性係数  $\epsilon$  は, 式(4.2)で与えられる.

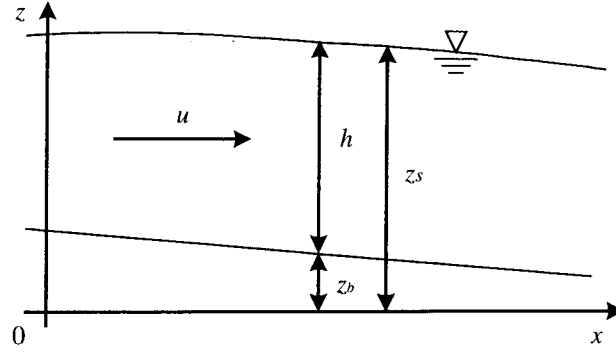


図-4.2 座標系の説明

$$\frac{\tau}{\rho} = \varepsilon \frac{du}{dz}$$

$$\varepsilon = \beta u_* h, \quad \beta = 0.077 \quad (4.2)$$

$$\beta u_* h \frac{d^2 u}{dz^2} = -g \sin \theta \quad (4.3)$$

上式を  $z$  軸方向に積分すると、次のようになる。

$$\beta u_* h (u - u_b) = g \sin \theta \left( h z - \frac{z^2}{2} \right) \quad (4.4)$$

ここで、主流方向流速分布式(4.4)が式(4.5)を満足することを考慮すると、底面  $z = z_b$  (この場合  $z_b = 0$ ) での流速  $u_b$  について式(4.6)が得られる。

$$U h = \int_{z_b}^{z_s} u dz \quad (4.5)$$

$$u_b = U - \frac{u_*}{3\beta} \quad (4.6)$$

底面流速  $u_b$  と摩擦速度  $u_*$  の関係を式(4.7)のように  $r_*$  を用いて定義し、式(4.6)から  $u_b$  を消去すると式(4.8)のように変形され、式(4.4)は最終的に式(4.9)となる。

$$u_b = r_* u_* \quad (4.7)$$

$$u_* \left( r_* + \frac{1}{3\beta} \right) = U \quad (4.8)$$

$$\frac{u}{U} = \frac{\beta r_* + \zeta - \zeta^2/2}{1/3 + \beta r_*}, \quad \zeta = \frac{z}{h} \quad (4.9)$$

上記の Engelund モデルは、等流の運動方程式から流速分布を誘導しているため、加速・減速に伴う移流が考慮されておらず、実験結果に見られるような加速・減速流の流速分布および底面せん断応力の特性を再現できない。

そこで本研究では、Engelund モデルを応用し、加速・減速効果をモデルに導入するため、移流項を加えた運動方程式から流速分布形を求める。誘導過程を以下に示す。実験結果の流速分布を詳細に再現するため、まず、流速分布を式(4.10)のように相対水深  $\zeta$  に関する 5 次のべき乗表示で



仮定する。なお、用いる座標系は図-4.2 のとおりである。

$$\frac{u}{U} = u_0 + u_1\zeta + u_2\zeta^2 + u_3\zeta^3 + u_4\zeta^4 + u_5\zeta^5 \quad (4.10)$$

ここに、 $\zeta = (z - z_b)/h$  である。

式(4.10)を連続式

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0$$

に代入し、 $z_b$  から  $z$  まで積分すると、鉛直方向流速分布  $w$  に関して次式が得られる。

$$\begin{aligned} w = & -\frac{\partial U h}{\partial x} \left( u_0\zeta + u_1 \frac{\zeta^2}{2} + u_2 \frac{\zeta^3}{3} + u_3 \frac{\zeta^4}{4} + u_4 \frac{\zeta^5}{5} + u_5 \frac{\zeta^6}{6} \right) \\ & + U(u_0 + u_1\zeta + u_2\zeta^2 + u_3\zeta^3 + u_4\zeta^4 + u_5\zeta^5) \left( \zeta \frac{\partial h}{\partial x} + \frac{\partial z_b}{\partial x} \right) \end{aligned} \quad (4.11)$$

ここで、水深積分モデルの定常状態の連続式(4.12)を用いると、式(4.11)は式(4.13)となる。

$$\frac{\partial U h}{\partial x} = 0 \quad (4.12)$$

$$w = U(u_0 + u_1\zeta + u_2\zeta^2 + u_3\zeta^3 + u_4\zeta^4 + u_5\zeta^5) \left( \zeta \frac{\partial h}{\partial x} + \frac{\partial z_b}{\partial x} \right) \quad (4.13)$$

式(4.10)、(4.13)を定常での  $x$  方向の運動方程式

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + w \frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \beta u_* h \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \quad (4.14)$$

に代入し、 $\zeta$  に関する 5 次のオーダーまでで整理すると式(4.15)が得られる。但し、せん断応力を表す式(4.14)右辺最終項は、Engelund モデルと同様に評価することとし、また、式(4.15)を導く際、底面せん断応力の定義から  $u_1$  と  $u_*$  の関係について式(4.16)を用いている。

$$\begin{aligned} & \frac{dh}{dx} \left\{ u_0^2 + 2u_0u_1\zeta + (u_1^2 + 2u_0u_2)\zeta^2 + (2u_0u_3 + 2u_1u_2)\zeta^3 + (2u_0u_4 + 2u_1u_3 + u_2^2)\zeta^4 \right. \\ & \left. + (2u_0u_5 + 2u_1u_4 + 2u_2u_3)\zeta^5 \right\} - \frac{h}{\rho U^2} \frac{\partial p}{\partial x} + \beta^2 u_1 (2u_2 + 6u_3\zeta + 12u_4\zeta^2 + 20u_5\zeta^3) = 0 \end{aligned} \quad (4.15)$$

$$\beta u_* U u_1 = u_*^2 \quad (4.16)$$

$a$ ,  $b$  をそれぞれ以下のように置き、 $\zeta$  の各次数の係数を 0 とすることで、 $u_0$ - $u_5$  に関する代数方程式(4.17)-(4.20)が得られる。

$$a = \frac{dh}{dx}, \quad b = -\frac{h}{\rho U^2} \frac{\partial p}{\partial x}$$

$$a u_0^2 + b + 2\beta^2 u_1 u_2 = 0 \quad (4.17)$$

$$2a u_0 u_1 + 6\beta^2 u_1 u_3 = 0 \quad (4.18)$$

$$a(u_1^2 + 2u_0u_2) + 12\beta^2 u_1 u_4 = 0 \quad (4.19)$$

$$a(2u_0u_3 + 2u_1u_2) + 20\beta^2 u_1 u_5 = 0 \quad (4.20)$$

さらに、式(4.10)が式(4.5)、(4.7)の関係を満足することを考慮すると、次式が求められる。

$$u_0 = \beta r_* u_1 \quad (4.21)$$

$$u_0 + \frac{u_1}{2} + \frac{u_2}{3} + \frac{u_3}{4} + \frac{u_4}{5} + \frac{u_5}{6} = 1 \quad (4.22)$$

以上より得られた代数方程式を解くと、式(4.10)の係数  $u_0$ - $u_5$  は次のようになる。

$$u_0 = \beta r_* u_1 \quad (4.23)$$

$$u_1 = \frac{u_*}{\beta U} \quad (4.24)$$

$$u_2 = -\frac{b}{2\beta^2 u_1} - \frac{ar_*^2}{2} u_1 \quad (4.25)$$

$$u_3 = -\frac{ar_* u_1}{3\beta} \quad (4.26)$$

$$u_4 = \left( -\frac{a}{12\beta^2} + \frac{a^2 r_*^3}{12\beta} \right) u_1 + \frac{abr_*}{12\beta^3 u_1} \quad (4.27)$$

$$u_5 = \frac{a^2 r_*^2 u_1}{12\beta^2} + \frac{ab}{20\beta^4 u_1} \quad (4.28)$$

なお、圧力分布について静水压を仮定すると、上式中の係数  $b$  は以下のように表される。

$$b = -\frac{gh}{U^2} \frac{dz_s}{dx}$$

## (2) 流速分布形の計算手順

断面平均流速  $U$ 、水深  $h$ 、路床勾配  $dz_b/dx$ 、水深勾配  $dh/dx$  について、加速・減速流の実験結果の値を与えれば、 $a$ 、 $b$  は既知量となる。また、 $r_*$  は等流での底面流速と摩擦速度の比であり、普遍定数として考える。しかし、本研究で比較する Song&Graf の実験結果には等流の結果が示されていないため、便宜的ではあるが、以下の方法で  $r_*$  を決める。まず、粗面の平均流速式(4.29)に各実験結果の水深  $h$  を代入し、 $U/u_*$  を求める。次に、得られた  $U/u_*$  を式(4.8)に代入し、 $r_*$  を計算すると、 $r_*$  が 7.5 から 8.5 となることから、8.0 として評価した。

$$\frac{U}{u_*} = A_r - \frac{1}{\kappa} + \frac{1}{\kappa} \ln \frac{h}{k_s} \quad (4.29)$$

ここに、 $k_s$ ；相当粗度（実験での砂礫の平均粒径 1.23cm）、 $A_r$ ；8.5、 $\kappa$ ；カルマン定数 (=0.4) である。

よって、式(4.23)-(4.28)より  $u_1$  が  $U/u_*$  のみの関数として表され、 $u_1$  が決まると  $u_0$ 、 $u_2$ - $u_5$  が計算できる。そこで、式(4.23)、(4.25)-(4.28)を式(4.22)に代入すると、 $u_1$  に関する 2 次方程式が得られる。

$$\left\{ \beta r_* + \frac{1}{2} - a \left( \frac{r_*^2}{6} + \frac{r_*}{12\beta} + \frac{1}{60\beta^2} \right) + a^2 \left( \frac{r_*^3}{60\beta} + \frac{r_*^2}{72\beta^2} \right) \right\} u_1^2 - u_1 - b \left( \frac{1}{6\beta^2} - \frac{ar_*}{60\beta^3} - \frac{a}{120\beta^4} \right) = 0 \quad (4.30)$$

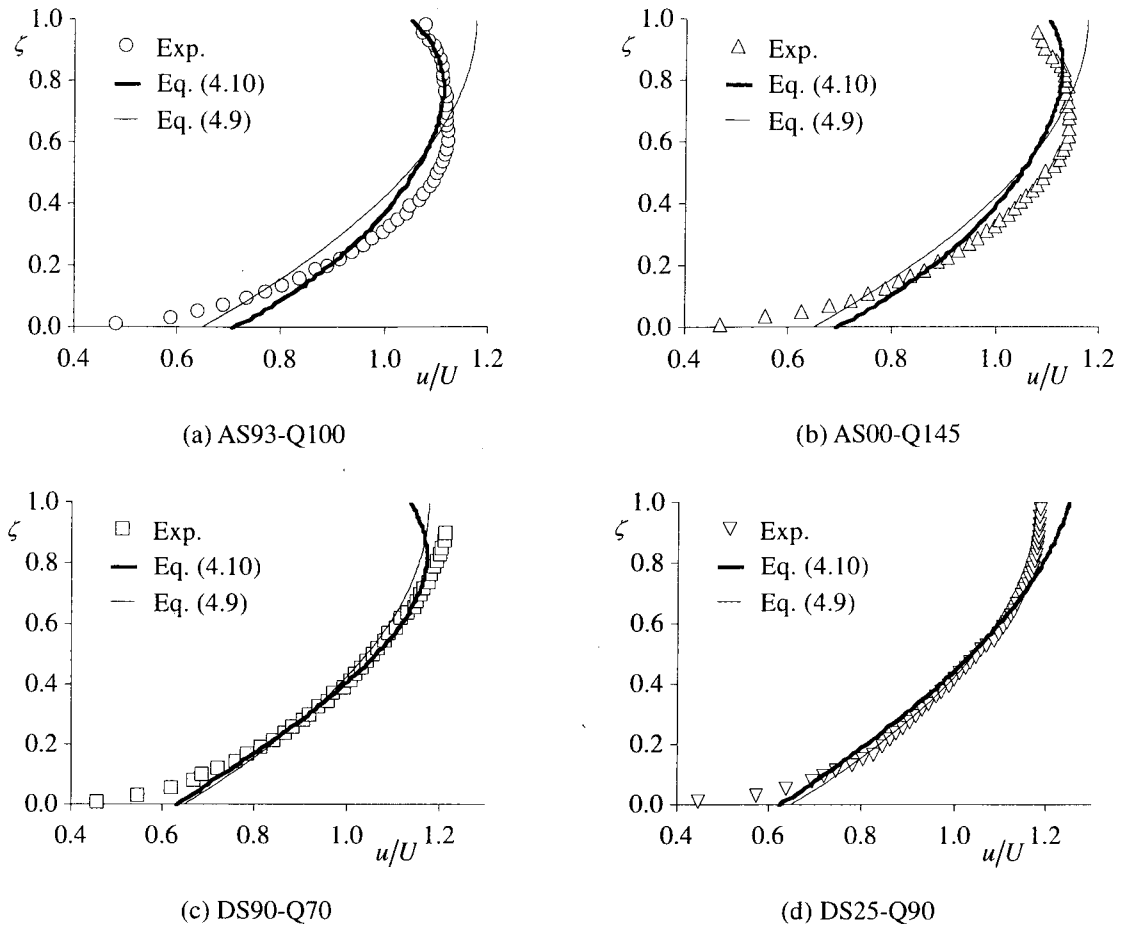


図-4.3 簡易モデルと実験結果の比較

式(4.30)を  $u_1$  について解き、式(4.23)、(4.25)–(4.28)に代入することで、流速分布式(4.10)の各係数が求められる。

また、本簡易モデルによる底面せん断応力は、式(4.26)から以下のように評価される。

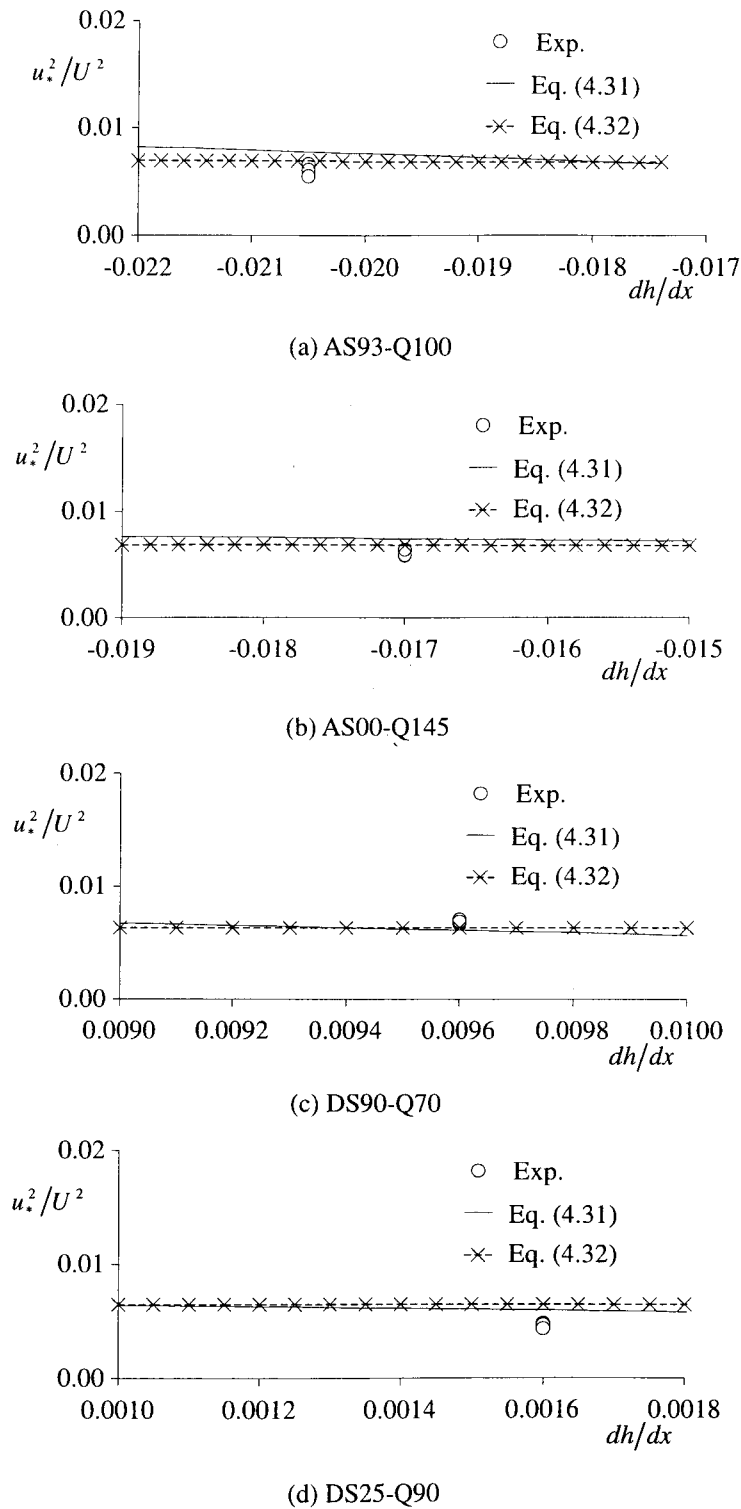
$$\frac{\tau_{bx}}{\rho} = u_*^2 = (\beta U u_1)^2 \quad (4.31)$$

#### 4.2.3 実験結果と簡易モデルの比較

本簡易モデルを検証するため、Song&Graf の実験に適用する。

図-4.3 は、簡易モデルの流速分布式(4.10)と実験結果を比較したものである。加速流(a), (b)の場合、底面付近での適合性が十分ではないが、ふっくらとした流速分布になるという実験結果の特徴を捉えている。一方、減速流(c), (d)の場合には、Engelund モデルよりも実験結果にほぼ適合する結果が得られた。

図-4.4 は、実験の水量で断面平均流速  $U$ 、水深  $h$ 、路床勾配  $dy_b/dx$  を固定し、水深勾配  $dh/dx$  を変化させた場合の底面せん断応力分布を示したものである。図には、実験結果も併せてプロットした。摩擦速度の評価法によって、実験結果に多少のばらつきがあるが、流速分布の結果と同様、加速流では適合性が十分ではなく、減速流についてはほぼ一致している。しかし、水深勾配


 図-4.4 底面せん断応力と  $dh/dx$  の関係

の変化に伴って、底面せん断応力がほぼ直線的に分布しており、Nakagawa&Tsujimoto<sup>9)</sup>により提案された波状路床上流れの底面せん断応力の評価式(4.32)と同様に評価されることがわかる。従って、次節で検討する小規模河床波の発生・発達過程と流れの抵抗則の数値解析では、解析法の簡便さから式(4.32)に若干の修正を加えた細田ら<sup>12)</sup>の評価式を適用する。修正法については、次節に記述

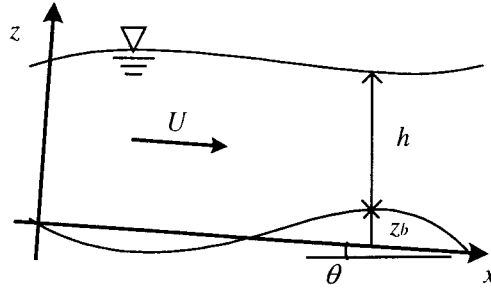


図-4.5 座標系と記号の説明

する。

$$u_*^2 = \frac{\tau_{bx}}{\rho} = fu_b^2 \left( 1 - \Gamma \frac{dh}{dx} \right) \quad (4.32)$$

ここに、 $u_*$ ；摩擦速度， $\tau_{bx}$ ；底面せん断応力， $f$ ；抵抗係数である。

### 4.3 基礎式

#### 4.3.1 鉛直加速度を考慮した波状路床上の水面形方程式

流れの基礎式には，細田ら<sup>18)</sup>と同様，鉛直方向の流況の変化をモデルに組み込むため，鉛直加速度を考慮した水深積分モデルを用いる。まず，基礎式の誘導過程を簡単に示す。用いる座標系と記号は図-4.5のとおりである。

$x$ 方向の流速成分  $u$  を水深方向について一様と仮定すると，次式となる。

$$u(x, z) = U(x) \quad (4.33)$$

ここに， $x$ ：空間座標， $u$ ：流速ベクトルの  $x$  方向成分， $U$ ：水深平均流速。

式(4.33)を連続式

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0$$

に代入し， $z$  から自由水面  $z_s$  まで積分すると， $z$  方向流速  $w$  の分布形について(4.34)式が得られる。

$$w = nU \frac{dh}{dx} + U \frac{dz_b}{dx} \quad (4.34)$$

ここに， $w$ ：流速ベクトルの  $z$  方向成分， $h$ ：水深， $z_b$ ：基準面からの路床変動である。また， $n$  は  $n = (z - z_b)/h$  で定義される相対水深を表す。

式(4.33)，(4.34)を  $z$  方向の運動方程式

$$u \frac{\partial w}{\partial x} + w \frac{\partial w}{\partial z} = g \cos \theta - \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{p}{\rho} \right)$$

に代入し， $z$  から自由水面  $z_s$  まで積分すると圧力分布の表示式(4.35)が得られる。

$$\begin{aligned} \frac{p}{\rho} = & gh \cos \theta (1-n) - U^2 \left( \frac{dh}{dx} \right)^2 \frac{1-n^2}{2} \\ & - U^2 \frac{dh}{dx} \frac{dz_b}{dx} (1-n) + U^2 h \frac{d^2 h}{dx^2} \frac{1-n^2}{2} + U^2 h \frac{d^2 z_b}{dx^2} (1-n) \end{aligned} \quad (4.35)$$

ここに、 $\theta$ : 路床勾配、 $\rho$ : 水の密度、 $g$ : 重力加速度。

式(4.33), (4.34), (4.35)を  $x$  方向の運動方程式に代入し、路床から水面まで積分すると、次式となる。

$$\frac{d(U^2 h)}{dx} + \frac{dP}{dx} + \left( \frac{p}{\rho} \right)_b \frac{dz_b}{dx} = gh \sin \theta - \frac{\tau_{bx}}{\rho} + \frac{d(-\overline{u'^2} h)}{dx} \quad (4.36)$$

$$\begin{aligned} P \equiv \int_b^s \frac{p}{\rho} dz = & \frac{gh^2}{2} \cos \theta + \frac{hq^2}{3} \left\{ -\frac{1}{h^2} \left( \frac{dh}{dx} \right)^2 + \frac{1}{h} \frac{d^2 h}{dx^2} \right\} \\ & - \frac{hq^2}{2} \left( \frac{1}{h^2} \frac{dh}{dx} \frac{dz_b}{dx} - \frac{1}{h} \frac{d^2 z_b}{dx^2} \right) \end{aligned} \quad (4.37)$$

ここに、 $q$ : 単位幅流量を表す、 $\tau_{bx}$ : 底面せん断応力ベクトルの成分。

式(4.37)の右辺最終項は、乱れによる運動量輸送項であり、本節では簡単のため渦動粘性係数  $D = \alpha q$  を用いて次式で評価する。

$$-\overline{u'^2} = D \frac{dU}{dx} = -D \frac{q}{h^2} \frac{dh}{dx}$$

$\alpha$ は係数であり、波状跳水を対象に同定された 0.05 を用いる<sup>24)</sup>。

以上をまとめると、鉛直加速度を考慮した波状路床上の水面形方程式として次式が得られる。

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dx} \left( \frac{q^2}{h} \right) + \frac{d}{dx} \left( \frac{gh^2}{2} \cos \theta \right) - \frac{d}{dx} \left\{ \frac{q^2}{3h} \left( \frac{dh}{dx} \right)^2 \right\} \\ & + \frac{d}{dx} \left( \frac{q^2}{3} \frac{d^2 h}{dx^2} \right) - \frac{d}{dx} \left( \frac{q^2}{2h} \frac{dh}{dx} \frac{dz_b}{dx} \right) + \frac{d}{dx} \left( \frac{q^2}{2} \frac{d^2 z_b}{dx^2} \right) \\ & + \frac{dz_b}{dx} \left\{ gh \cos \theta - \frac{U^2}{2} \left( \frac{dh}{dx} \right)^2 - U^2 \frac{dh}{dx} \frac{dz_b}{dx} + \frac{U^2 h}{2} \frac{d^2 h}{dx^2} + U^2 h \frac{d^2 z_b}{dx^2} \right\} \\ & = gh \sin \theta - \frac{\tau_{bx}}{\rho} + \frac{d}{dx} \left( \alpha h^2 U \frac{dU}{dx} \right) \end{aligned} \quad (4.38)$$

### 4.3.2 底面せん断応力の評価式

4.2 では、加速・減速流の流速分布に関する簡易モデルを誘導し、水深積分モデルへ適用する際の底面せん断応力の評価法について検討した。その結果、従来波状路床上流れで用いられている評価式の有効性を示した。そこで本節では、計算の簡便さから、細田ら<sup>12)</sup>によって提案された評価式を適用する。彼等は、路床からある程度離れた領域で近似と考えられるポテンシャル流の流速分布を水深積分モデルに導入するとともに路床近傍の加速・減速効果を考慮することで底面せん断応力を評価している。その誘導過程を以下に示す。

路床からある程度離れた領域の流速分布形の変化を、流れの非回転条件を用いて考慮する。第

1 近似として、流速の一樣分布から求めた鉛直方向流速分布式(4.34)を非回転条件

$$\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = 0$$

に代入し、水深方向に積分することで  $x$  方向流速分布の第2近似を求めると、次式が得られる。

$$u = \frac{q}{h} + \frac{q}{h} \left( \frac{dh}{dx} \right)^2 \left( \frac{1}{3} - n^2 \right) + \frac{q}{h} \frac{dh}{dx} \frac{dz_b}{dx} (1 - 2n) - q \frac{d^2 h}{dx^2} \left( \frac{1}{6} - \frac{n^2}{2} \right) - q \frac{d^2 z_b}{dx^2} \left( \frac{1}{2} - n \right) \quad (4.39)$$

また細田ら<sup>12)</sup>は、Nakagawa & Tsujimoto が底面せん断応力の評価に用いた式(4.32)において、路床近傍の加速・減速効果を表す項に水深だけでなく、路床変動の空間微分を導入した式(4.40)を考えた。本節でも式(4.40)を用いて流速分布形の変化に伴う底面せん断応力を評価する。

$$\frac{\tau_{bx}}{\rho} = f u_b^2 \left( 1 - \Gamma \frac{dh}{dx} + \Delta \frac{dz_b}{dx} \right), \quad \Gamma = 2, \Delta = 1 \quad (4.40)$$

ここに、 $u_b$ ：路床近傍の流速であり、式(4.39)に  $z = z_b$ 、即ち  $n = 0$  を代入した次式で評価する。

$$u_b = \frac{q}{h} + \frac{q}{3h} \left( \frac{dh}{dx} \right)^2 + \frac{q}{h} \frac{dh}{dx} \frac{dz_b}{dx} - \frac{q}{6} \frac{d^2 h}{dx^2} - \frac{q}{2} \frac{d^2 z_b}{dx^2} \quad (4.41)$$

式(4.40)、(4.41)の妥当性については、波状路床上流れの底面せん断応力分布に関する実験結果と比較され、検証されている<sup>12)</sup>。

#### 4.3.3 路床変動モデル

路床変動解析には、流砂の非平衡性を考慮した式(4.42)を用いる<sup>11)</sup>。

$$\frac{\partial z_b}{\partial t} = \frac{1}{1 - \lambda} \frac{A_3}{A_2} d(p_d - p_s) \quad (4.42)$$

ここに、 $p_s$ ：pick-up rate,  $p_d$ ：deposit-rate,  $d$ ：河床材料の粒径,  $\lambda$ ：河床の空隙率,  $A_2$ ,  $A_3$ ：砂粒の2次元, 3次元の形状係数 ( $=\pi/4$ ,  $\pi/6$ )。

pick-up rate の算定には、中川・辻本<sup>11)</sup>による式(4.43)を用い、deposit-rate は pick-up された土砂体積が式(4.44)で表される step length の確率密度関数に従って堆積するものとして計算する。

$$p_s \sqrt{d / (\sigma / \rho - 1) g} = 0.03 \tau_* (1 - 0.035 / \tau_*)^3 \quad (4.43)$$

$$f_s(s) = \frac{1}{\Lambda} \exp\left(-\frac{s}{\Lambda}\right) \quad (4.44)$$

ここに、 $\sigma$ ：砂粒の密度,  $\tau_*$ ：無次元掃流力,  $s$ ：砂粒が pick-up された地点からの距離,  $\Lambda$ ：step length であり、既往の研究により粒径の50倍から250倍と指摘されている。ここでは、粒径の100倍として計算する。

#### 4.4 数値解析法

流れの数値解析法として、波状跳水、砂堆の発生・発達過程を再現するために用いた解析法

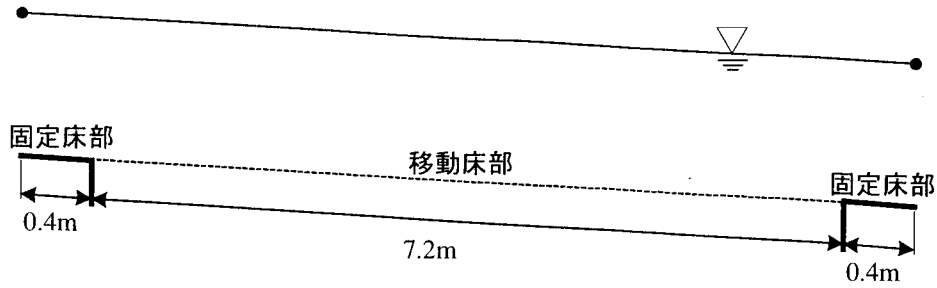


図-4.6 モデル水路の概要

表-4.2 計算の水理条件

Case	$d$ (cm)	$\sin\theta$	Case	$d$ (cm)	$\sin\theta$
D1	0.030	1/500	A1	0.030	1/40
D2	0.040	1/500	A2	0.040	1/40
D3	0.045	1/500	A3	0.045	1/40
D4	0.050	1/500	A4	0.050	1/50
D5	0.040	1/750	A5	0.040	1/50
D6	0.045	1/750	A6	0.045	1/50
D7	0.030	1/1000	A7	0.030	1/50
D8	0.040	1/1000			
D9	0.045	1/1000			
D10	0.050	1/1000			

と同様な収束計算法を適用する<sup>18,24)</sup>。但し、砂堆の発生・発達過程の数値シミュレーション<sup>24)</sup>では、発達過程における流れの抵抗増加が明らかにされていない。この理由として、水深勾配がある一定値を超えると静水圧にし、鉛直加速度項を考慮していないためであると考えられる。従って、本研究では、水深勾配がある一定値を超えると、基礎式の鉛直加速度項に減衰関数を局所的に乘じ、モデルの改良を行っている。減衰関数を乗ずることで、水深勾配が大きい場合に生じる碎波をある程度再現できると考えられる。

計算法の詳細については参考文献<sup>18,24)</sup>に記載されているため、本論文では箇条書きにして簡単に紹介する。

- 1) 式(4.41)中の各項を例えば次式のように離散化する。

$$\frac{dh}{dx} = \frac{h_{i+1} - h_{i-1}}{2\Delta x}, \quad \frac{d^2h}{dx^2} = \frac{h_{i+1} - 2h_i + h_{i-1}}{\Delta x^2}$$

- 2) ある計算ステップ $k$ での $h_i^k$ を既知とする。
- 3) 式(4.38)の離散式に $h_i^k$ を代入して、各点での誤差 $er_i^k$ を求める。この誤差と次式を用いて次のステップ $k+1$ での水深 $h_i^{k+1}$ を計算した。収束計算のパラメータ $\omega$ は0.02とした。

$$h_i^{k+1} = h_i^k + sig(k) \cdot \omega \cdot |er_i^k|$$

$$sig(k) = -1 \cdot sig(k-1) \quad \text{for} \quad |er_i^k| \geq |er_i^{k-1}|$$



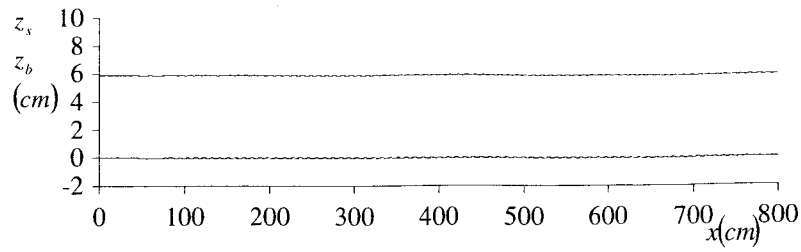
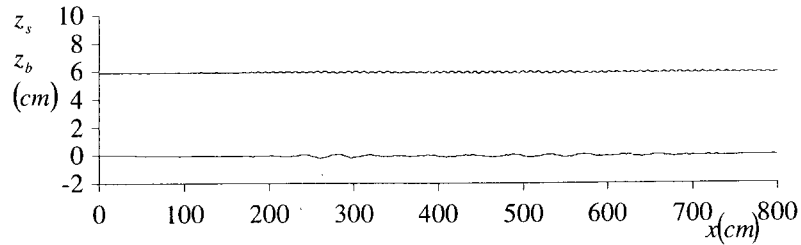
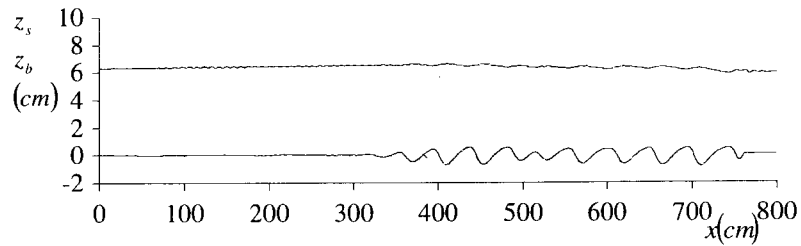
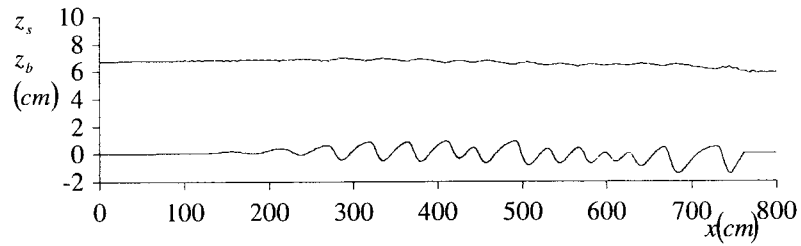
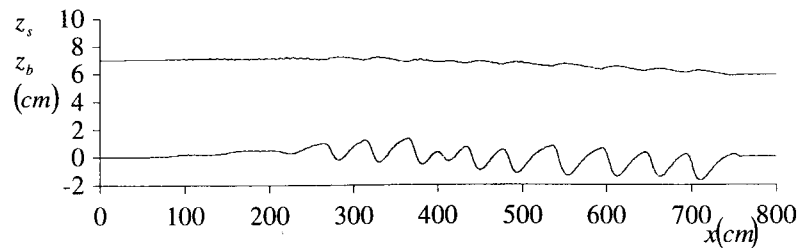

 (a)  $t = 500$  (s)

 (b)  $t = 3000$  (s)

 (c)  $t = 5000$  (s)

 (d)  $t = 10000$  (s)

 (e)  $t = 20000$  (s)

図-4.7 砂堆の発生・発達過程の計算結果 (RunD3)

$$sig(k) = 1 \cdot sig(k-1) \quad \text{for} \quad |er_i^k| < |er_i^{k-1}|$$

- 4) 流れの収束計算を 20 万ステップ行った後、式(4.42), (4.43), (4.44)を用いて路床変動計算を 2 秒間( $\Delta t=0.1s$ )行い、再び流れの収束計算を行った。

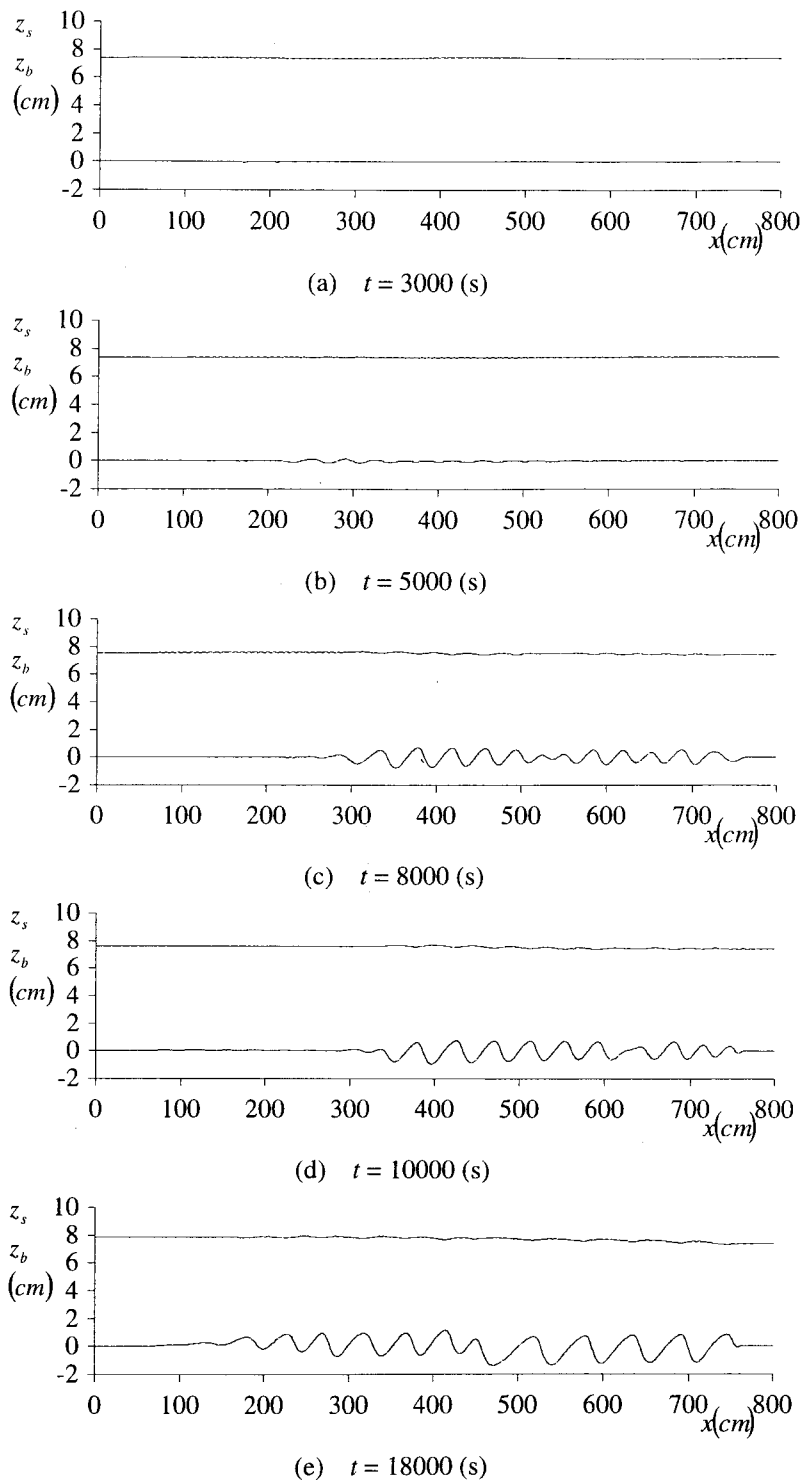


図-4.8 砂堆の発生・発達過程の計算結果 (RunD8)

#### 4.5 計算条件

図-4.6 に示すように長さ 8.0m の水路 ( $\Delta x = 2.0$ cm) を考え、上下流端 0.4m を固定床とし、その間 0.4m - 7.6m の区間を移動床とする。  $x$  座標系の原点は図-4.6 に示した上流側固定床部の上流端である。計算条件を表-4.2 に示す。単位幅流量  $q$  および摩擦損失係数  $f$  をそれぞれ  $200(\text{cm}^3/\text{s}/\text{cm})$  お

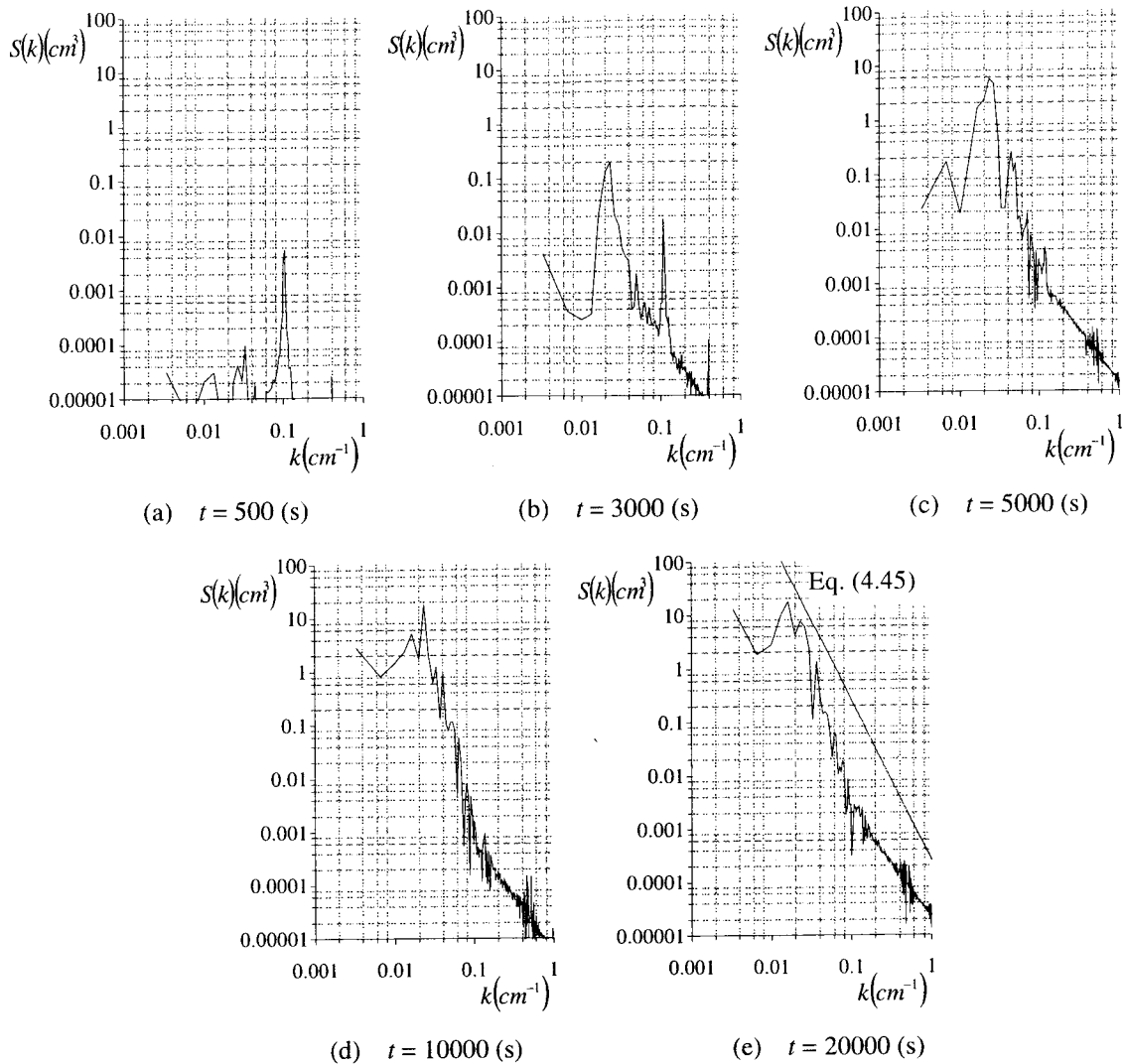


図-4.9 砂面波数スペクトルの時間変化 (RunD3)

よび 0.01 で固定し、路床勾配、砂粒の粒径を変化させた。また、水面形解析の境界条件として水深に関する三つの条件が必要となる<sup>18)</sup>ため、常流の場合には下流端で、射流の場合には上流端で等流水深を与え、上下流端で  $dh/dx=0$  とした。流砂量に関しては、移動床部の平均河床が低下しないように固定床下流側から土砂を pick-up させ、路床変動計算終了後、河床高を 0 とした。

初期状態 ( $t=0$ ) では、一様に等流水深

$$h_0 = \left( \frac{fq^2}{g \sin \theta} \right)^{1/3}$$

を与え、河床高は 0 (すなわち平坦河床) として計算を始めた。

#### 4.6 数値解析結果と考察

計算結果の例として、RunD3, D8 における水面、河床高の時間的变化を図-4.7, 4.8 に示した。

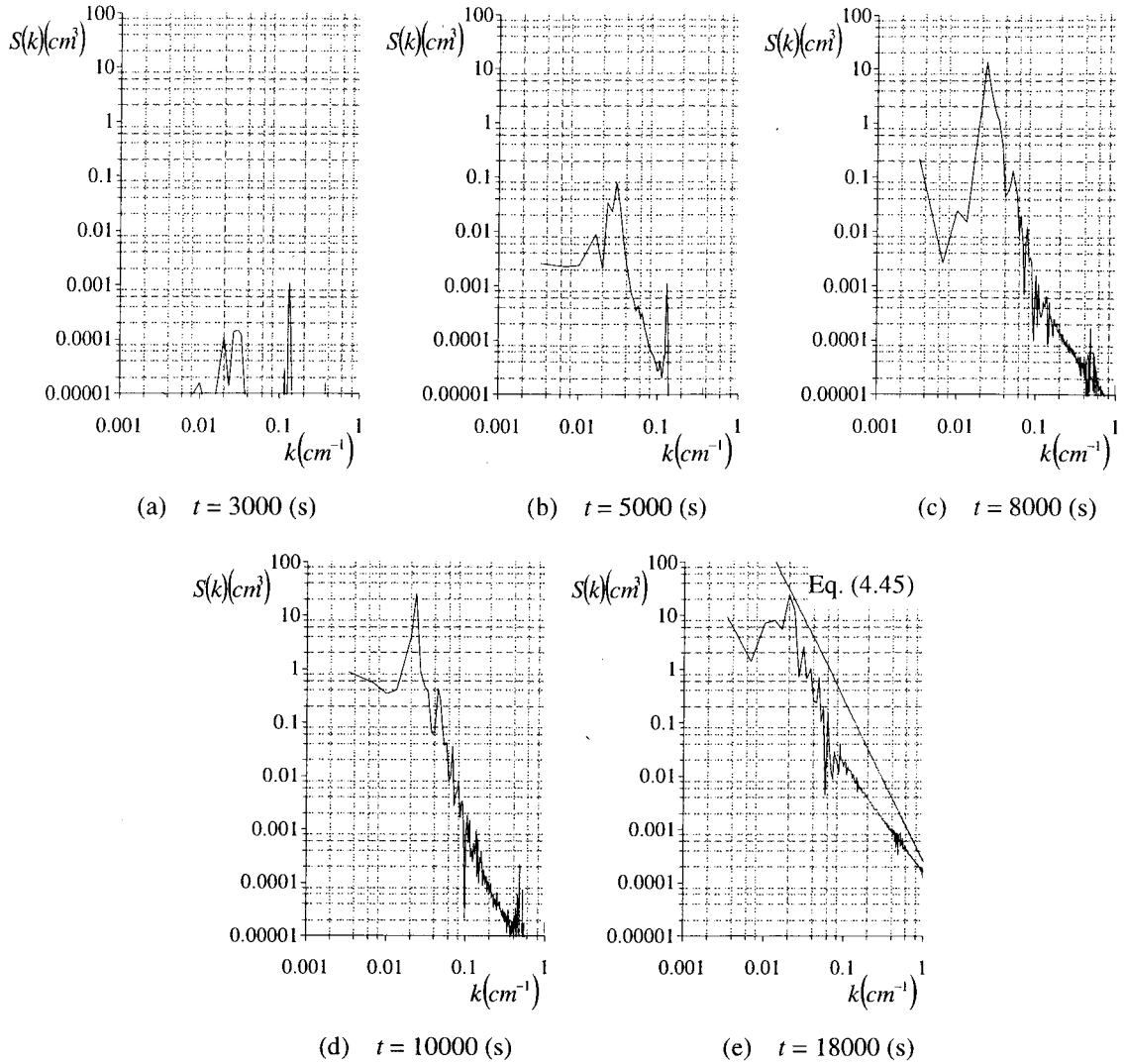


図-4.10 砂面波数スペクトルの時間変化 (RunD8)

移動床上流側から発生した微小擾乱が時間の経過とともに増幅していき、砂堆が発達しながら下流側へ進行している様子が再現されている。また、砂堆の発達に伴って、鉛直加速度項例えば、路床変動  $z_b$  の空間微分項が形状抵抗として現れるため、抵抗（水深）の増加が確認される。但し、剥離のモデル化については今後の検討を要する。

#### 4.6.1 砂堆の形成機構

河床波の形成機構をより詳細に考察するため、平坦河床から河床波が形成される過程について波数スペクトルの時間的変化を調べる。図-4.9, 4.10 は、RunD3, D8 における砂面波数スペクトルの時間的変化を示したものであり、日野<sup>25)</sup>が次元解析的に求めた式(4.45)も併記している。

$$S(k) = \alpha(\phi) k^{-3} \quad (4.45)$$

ここで  $\alpha(\phi)$  は定数である。また、RunD3, D8 における路床の拡大図、波長  $L$ 、波高  $H$ 、波形勾配  $H/L$  の時間的変化を図-4.11, 4.12, 4.13, 4.14 に示す。

砂面波数スペクトルについて中川・辻本<sup>13,14)</sup>は実験結果から発達初期に鋭いスペクトルピーク

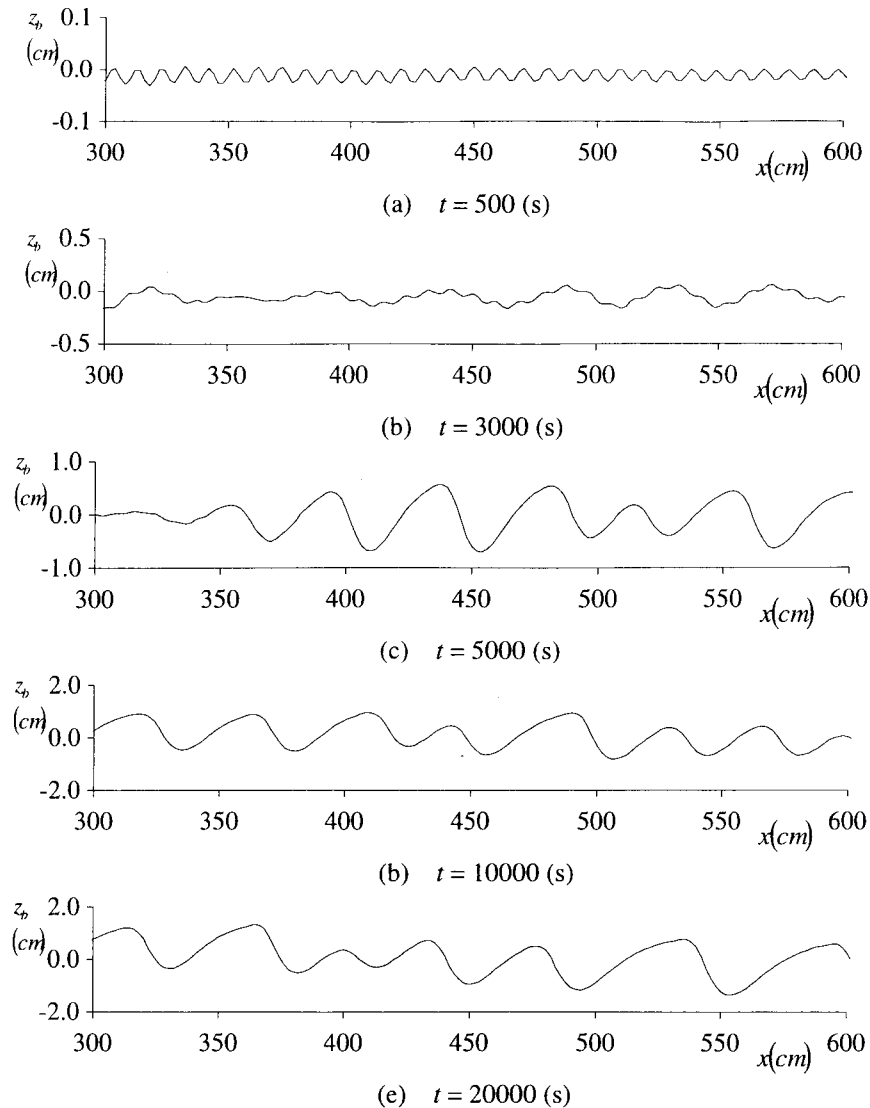


図-4.11 河床波の時間変化 (RunD3)

の存在が認められること、その後ピークは徐々に低波数側へ移行すること、さらに平衡状態に達すると高波数では3乗則が成立することを指摘している。計算結果の初期段階に注目すると、波数  $k=0.1(\text{cm}^{-1})$  付近で顕著なスペクトルピークが確認される。これは、図-4.11(a)、4.12(a)に見られる波長約 10cm の規則的な河床波と対応しており、実験結果と同様に、Airy の関係を満たす波長の波に相当すると考えられる。

発達中期になると、低波数側のスペクトル値が大きくなり、初期ほど顕著なものではないが、低波数側にスペクトルピークが現れる。このピークは平衡状態に近づくに当たって若干低波数側へ移行するか、或いはほとんど移動しない。また、低波数側のスペクトルがさらに増大することによってピークが鈍くなっていく様子が見受けられる。この発達中期に現れるピークは、図-4.11、4.12(b)、(c)における波長約 40-50cm の河床波に対応したものであり、平衡状態で生じる河床波の波長とほぼ同じである。これは、図-4.13、4.14 から確認され、波高は時間の経過とともに発達し、平衡になるのに対し、波長は初期段階から中期において急に発達し、それ以降はほとんど変化していない。中川・辻本の実験結果では、波長、波高とも時間の平方根に従って発達し

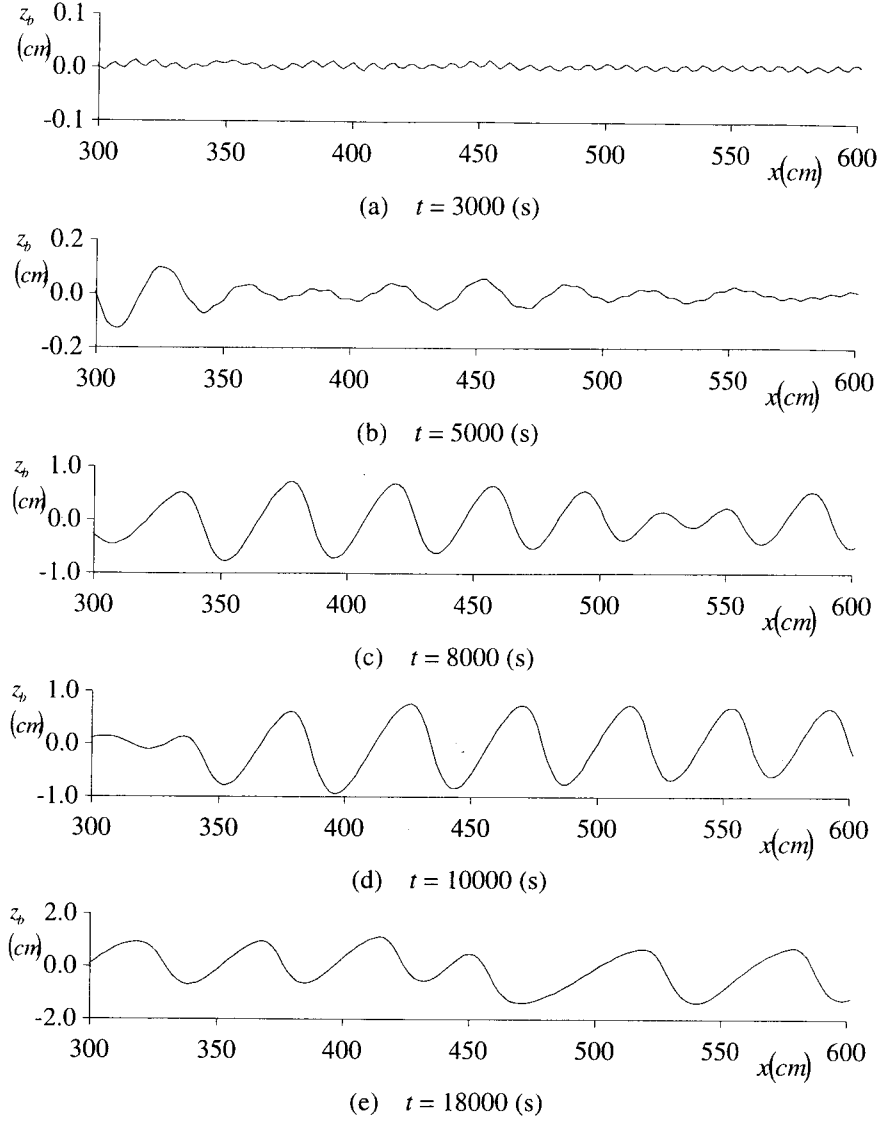


図-4.12 河床波の時間変化 (RunD8)

ているが、初期に発生する河床波と中期以降に発達する河床波では発達時間スケールが異なるため、以上のような結果が得られたと考えられる。

最終的に平衡状態に達すると、高波数領域では-2から-4乗則となっており、ほぼ-3乗則を満たしている。

図-4.15 は、河床波の発達時間スケールについて中川・辻本<sup>26)</sup>の提案式(4.46)と比較したものである。

$$\begin{aligned} \Pi_T &\equiv \left\{ T_D \sqrt{(\sigma/\rho - 1)gd/h} \right\} (d/h)(\tau_{*c})^{3/2} \\ &= \frac{1 - \rho_0}{2f_s(\alpha)} k_T k_L^2 \frac{\delta}{10\tau_{*c}(\tau_{*c}/\tau_{*c})^{1.5}} \end{aligned} \quad (4.46)$$

ここに、 $T_D$ : 実際の発達スケール、 $1 - \rho_0 = 0.6$ 、 $f_s(\alpha) = 0.08$ 、 $k_L = 5.0$ 、 $k_T = 2.0$ 、 $\delta$ は、後述の Yalin-Karahan による提案式(4.48)である。ただし、計算結果の限界無次元掃流力 $\tau_{*c}$ については各々の粒径を岩垣の式に代入して算出し、式(4.46)については、代表値として粒径  $d = 0.04\text{cm}$  から求めた。また、計

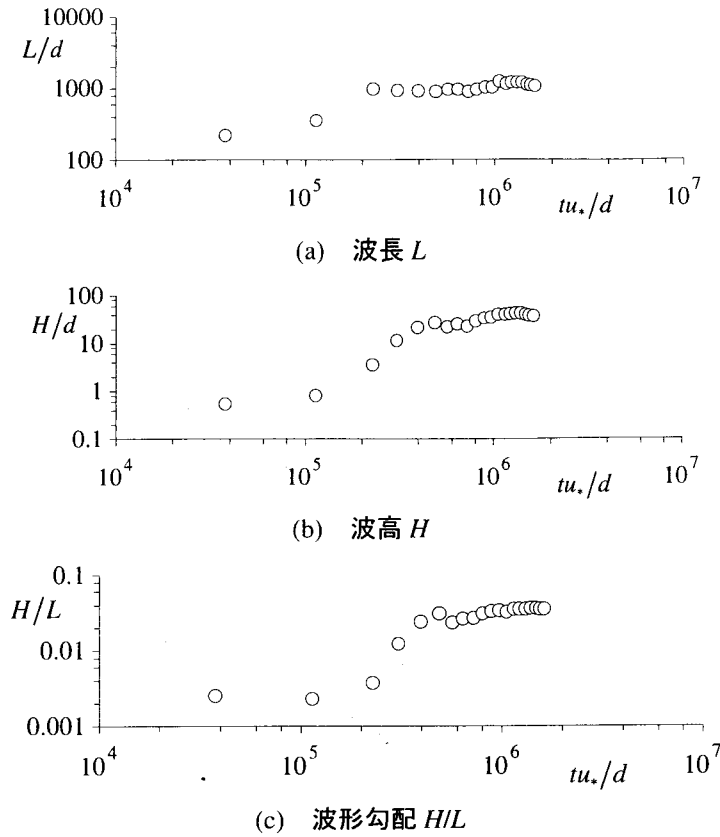


図-4.13 波長、波高、波形勾配の時間変化 (RunD3)

算結果における河床波の発達スケール  $T_D$  については、図-4.13、4.14 を参考に波形勾配の時間的変化から平衡状態に達したと考えられる時間を用いた。図をみると、計算結果と式(4.46)はほぼ一致している。

#### 4.6.2 砂堆の形状特性

表-4.3 は、 $x=3.0\text{m}$  から  $6.0\text{m}$  の区間の平衡状態における計算結果を用い、平均波長、平均水深について整理したものである。砂堆の平均波長については、従来の研究から水深の 5 倍程度と見積もられており、計算結果はある程度妥当なものである。

また、表-4.3 の結果から、波形勾配  $H/L$  と無次元掃流力  $\tau_*$  の関係についてまとめたものが図-4.16 である。計算結果は、Fredsoe<sup>27)</sup>、Yalin-Karahan<sup>28)</sup> の提案式(4.47)、(4.48)とほぼ適合していることがわかる。

[Fredsoe]

$$\delta = \frac{H}{L} = \frac{1}{8.4} \left( 1 - \frac{\tau_{*c}}{\tau_*} - 0.4\tau_* \right)^2 \quad (4.47)$$

[Yalin-Karahan]

$$\delta = \frac{H}{L} = \delta_{\max} \frac{\eta - 1}{\eta - 1} \exp \left( \frac{\bar{\eta} - \eta}{\eta - 1} \right)$$

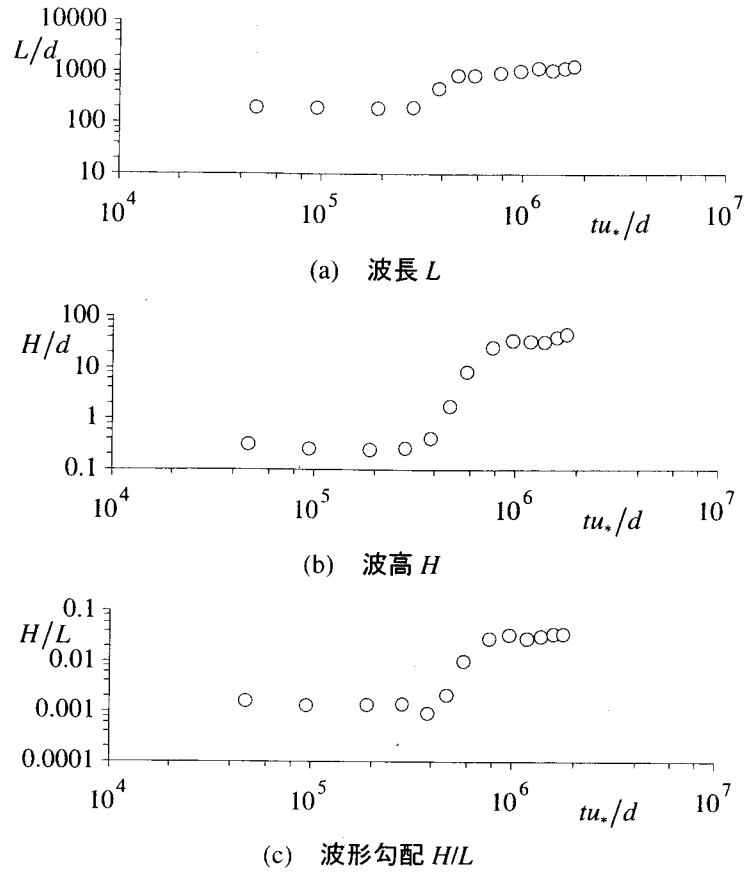


図-4.14 波長，波高，波形勾配の時間変化 (RunD8)

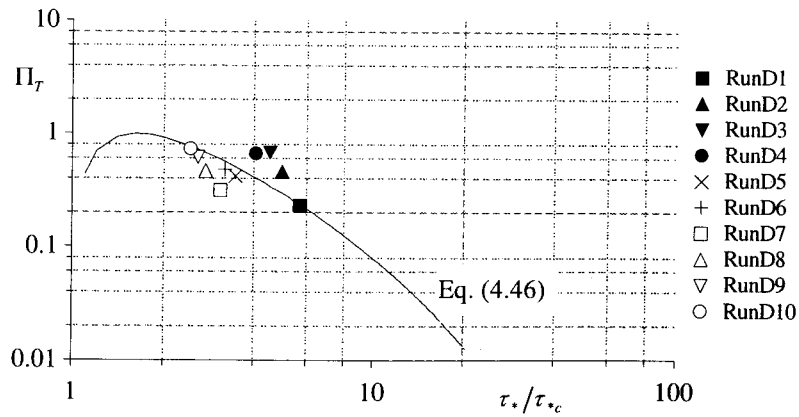


図-4.15 砂堆の時間発達スケール

$$\delta_{\max} = 0.0047(\bar{\eta} - 1), \quad \eta = \tau_*/\tau_{*c}$$

$$\bar{\eta} = 12.84 \quad \text{for} \quad 100 \leq h_0/d \leq 1.04 \times 10^5 \quad (4.48)$$

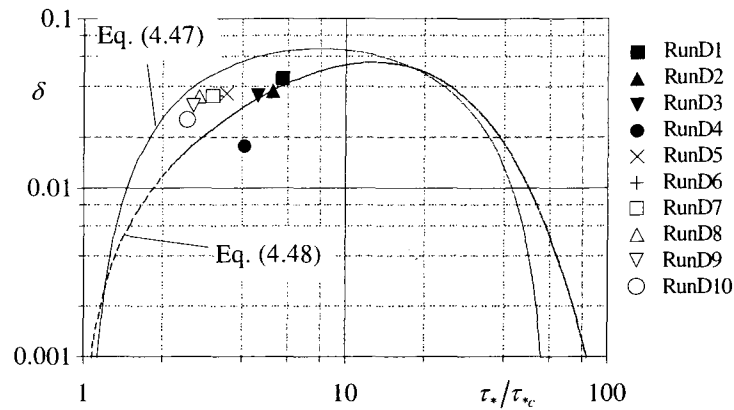
#### 4.6.3 反砂堆

反砂堆の計算結果として，RunA2 の水面，河床高の時間的変化を示したものが図-4.17 である。水面形状と河床波形状が同位相となっており，定性的に反砂堆の様相を呈している。図-4.17(e) は， $x = 4.0\text{m}$  から  $5.0\text{m}$  の範囲の路床を拡大したものであり，反砂堆が上流に向かって進んでいる



表-4.3 平均水深、平均波高に関する計算結果

Run	平均水深 $h(\text{cm})$	平均波長 $L(\text{cm})$
D1	7.4	42.3
D2	7.1	50.0
D3	6.7	47.0
D4	6.2	58.8
D5	7.4	37.4
D6	7.1	48.0
D7	8.0	32.2
D8	7.8	52.0
D9	7.7	54.4
D10	7.6	46.7


 図-4.16 波形勾配  $H/L$  と  $\tau$  の関係

のがわかる。

図-4.18 は, RunA2 における波数スペクトルの時間的変化を示したものである。不規則な波の集合である砂堆の場合とは異なり, ある波数でピークをもち, 規則的な河床波が形成されていることがわかる。

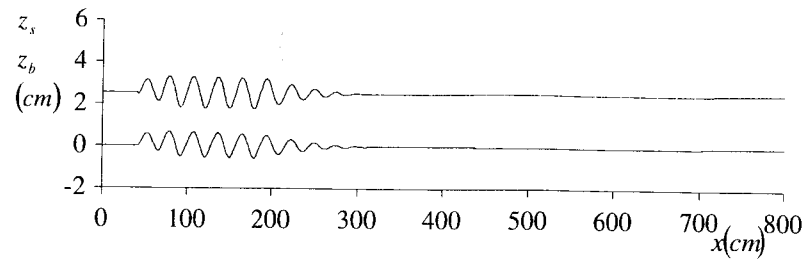
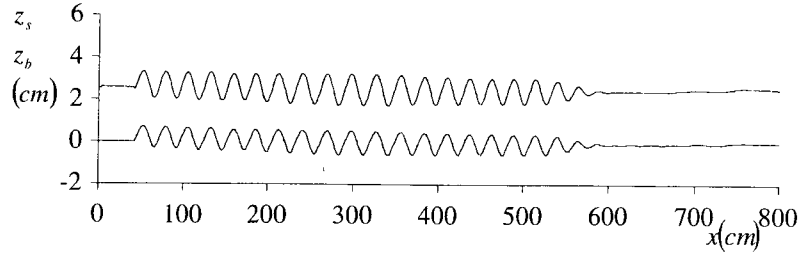
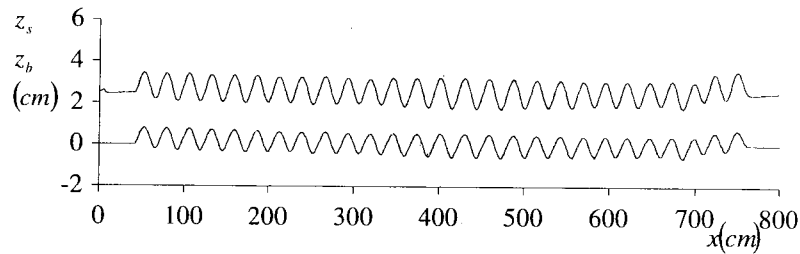
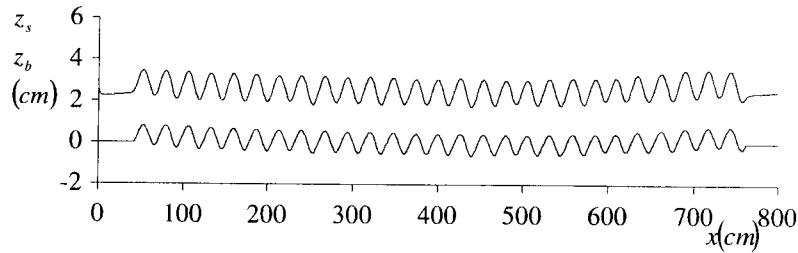
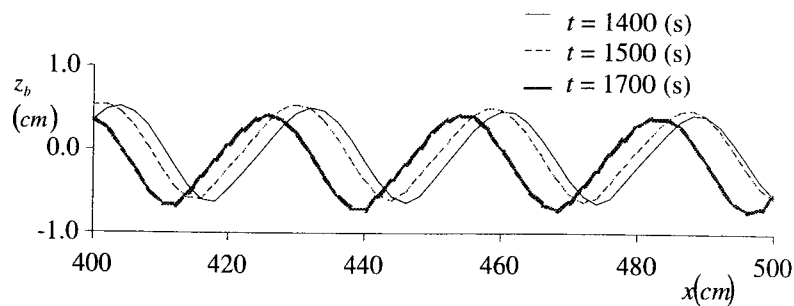
#### 4.6.4 無次元波数 $kh$ とフルード数 $Fr$ による領域区分

図-4.19 は, 無次元波数  $kh$  とフルード数  $Fr$  による領域区分を示したものであり, 図中の曲線は, 安定解析<sup>9)</sup>によって導かれる砂堆と反砂堆の区分曲線(4.49)とゼロ振幅曲線(4.50)を表している。但し,  $k=2\pi/L$  である。

$$Fr^2 = \frac{\tanh kh}{kh} \quad (4.49)$$

$$Fr^2 = \frac{1}{kh} \quad (4.50)$$

図には, 砂堆の発達初期における計算結果 (RunD3, D8) も併せて示す。前述のように, 発達初期では, 共鳴関係式(4.49)を満足する波長が卓越することが分かる。また, 計算結果は, 従来の実験結果同様, 砂堆・反砂堆の領域区分図と適合している。


 (a)  $t = 500$  (s)

 (b)  $t = 1000$  (s)

 (c)  $t = 1500$  (s)

 (d)  $t = 2500$  (s)


(e) 反砂堆の移動方向

図-4.17 反砂堆の計算結果 (RunA2)

#### 4.6.5 流れの抵抗則

岸・黒木<sup>16)</sup>は Engelund<sup>15)</sup>の理論を発展させ、各河床形態に対する抵抗則を導いている。抵抗則（流速係数 $\varphi$ と無次元掃流力の関係）と領域区分を示すと以下ようになる。

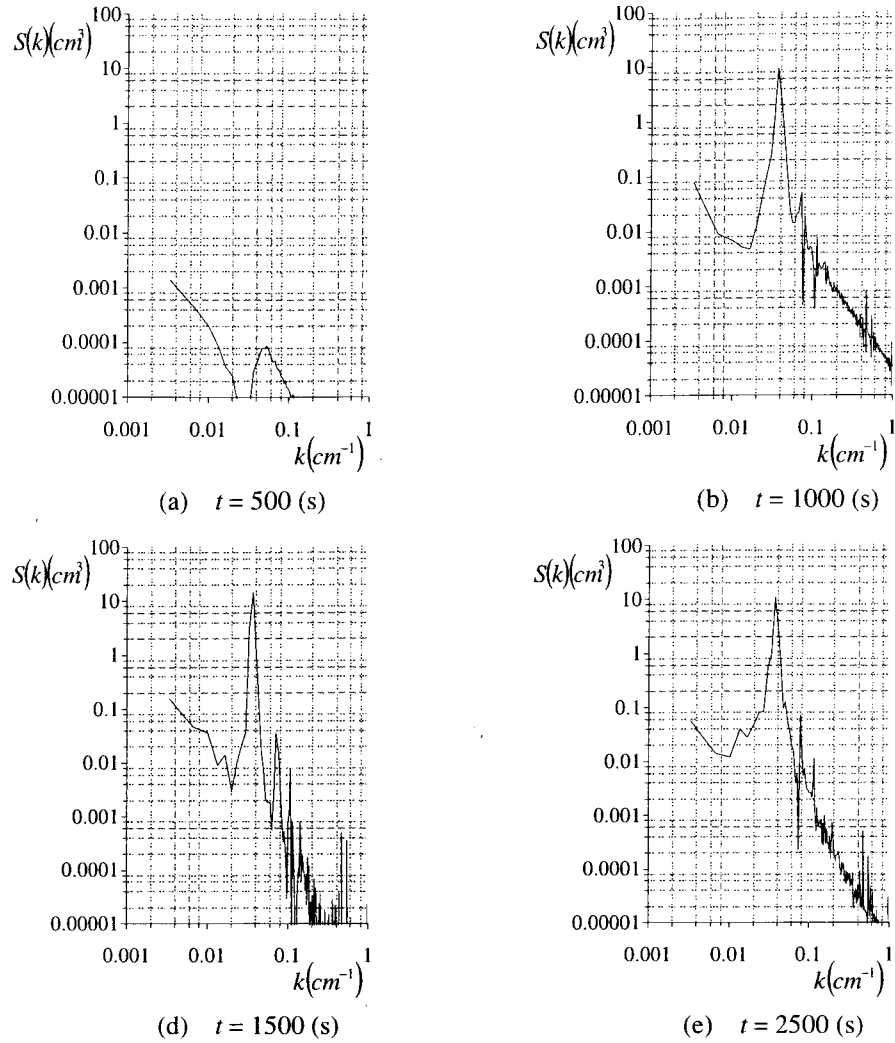


図-4.18 砂面波数スペクトルの時間変化 (RunA2)

[砂堆河床 I]

$$\varphi = 2.4(h/d)^{1/6} \tau_*^{-1/3} \quad (4.51)$$

[砂堆河床 II]

$$\varphi = 8.9 \quad (4.52)$$

[遷移河床 I]

$$\varphi = 1.1 \times 10^6 (h/d)^{-3/2} \tau_*^3 \quad (4.53)$$

[平坦河床]

$$\varphi = 6.9(\kappa_0/\kappa)^{1/2} (h/d)^{1/6} \quad (4.54)$$

[反砂堆河床]

$$\varphi = 2.8(h/d)^{3/10} \tau_*^{-1/3} \quad (4.55)$$

ここに $\kappa$ ,  $\kappa_0$ はそれぞれ清水流, 流砂を含んだ流れでのカルマン定数である.

図-4.20 は, 流速係数に関して計算結果と抵抗則(4.51)-(4.55)を比較したものである. なお, 相対水深  $h/d$  には, 計算結果を参考に 100 と 200 を代入している. 図をみると, 計算結果における流速係数は, 提案式とほぼ一致しており, 本解析モデルは流れの抵抗則を評価できると考えられ

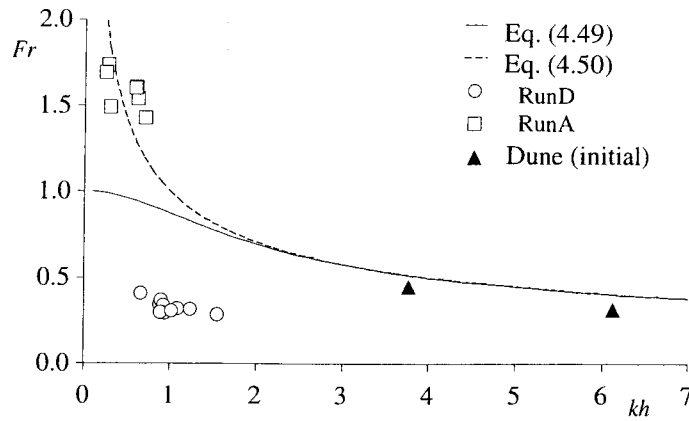
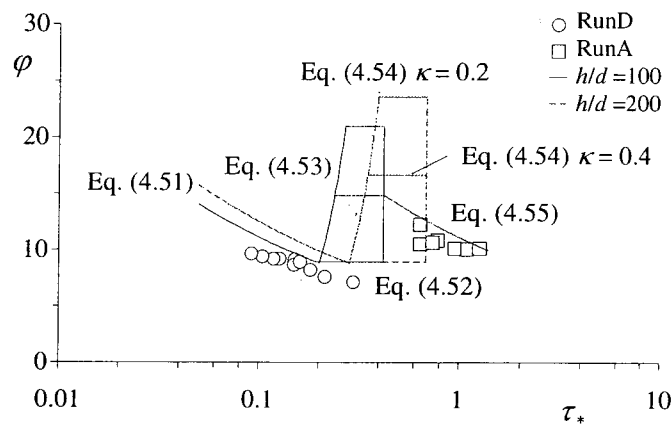

 図-4.19 無次元波数  $kh$  とフルード数  $Fr$  による領域区分図


図-4.20 流速係数の比較

る。今後、遷移領域、或いは平坦河床の場合について検討したい。

## 4.7 結語

本章では、水深積分モデルによる小規模河床波の発生・発達過程と流れの抵抗則に関する数値解析について検討した。以下に、本章で得られた結論をまとめる。

水深積分モデルを用いて河床波の発生・発達過程の数値解析を行う場合、まず、河床波上の流れを精度よく計算することが必要となる。その中でも、底面せん断応力は流れと土砂輸送の両方にリンクする重要なパラメータであると考えられる。従来、河床波上の底面せん断応力には、ポテンシャル流解析で得られる流速分布形に路床近傍の加速・減速効果を考慮することで評価されてきた。その中で、定数 $\Delta$ 、 $\Gamma$ の値については、波状路床上流れの底面せん断応力分布に適合するように同定されているが、その物理的根拠はないように思われる。そこで 4.2 では、簡易モデルを用いてその物理的根拠を明らかにし、底面せん断応力の評価法について検討した。

- (1) 加速・減速流の流速分布に関する簡易モデルを誘導し、Song & Graf の実験に適用して簡易モデルの妥当性を検証した。その結果、加速流の場合では実験結果に見られるような最大流速点の dip を再現した。また、減速流の場合には簡易モデルと実験結果はほぼ一致した。
- (2) 底面せん断応力について簡易モデルと従来用いられている評価式の比較を行った。底面せん断応力と水深勾配の関係をみると、Nakagawa & Tsujimoto による提案式と同様、直線分布となることが示され、従来の評価式の有効性を物理的に明らかにした。

次に、解析法の簡便さから底面せん断応力に従来の評価法を用い、小規模河床波の発生・発達過程と流れの抵抗則の数値解析を行った。

- (1) 細田らの数値解析モデルを改良することで、砂堆の発生・発達過程における流れの抵抗増加を示した。また、波数スペクトルの時間的変化を調べ、河床波の形成過程を詳細に検討した。砂堆の発生初期段階では、実験結果と同様に共鳴関係（Airy の関係）を満足する波長の波が生じることを示した。その後、波長は急激に発達するのに対し、波高は徐々に発達した。形成過程は実験結果と異なるものの、発達時間スケールについては従来の研究とほぼ一致した。さらに、砂堆の形状特性についても既往の実験結果と比較し、実験結果とほぼ適合することを示した。
- (2) 反砂堆についても数値解析を行い、計算結果が実験結果と定性的に一致することを示した。
- (3) 河床波の区分領域、流れの抵抗則について既往の研究と比較した。その結果、計算結果が実験結果とほぼ適合することから本数値解析モデルの妥当性を明らかにした。

## 参考文献

- 1) 黒木幹男, 岸 力: 中規模河床波の領域区分に関する理論的研究, 土木学会論文報告集, 第342号, pp.87-96, 1984.
- 2) 清水康行, 板倉忠興, 山口 甲: 2次元モデルを用いた河床形態変化のシミュレーション, 第31回水理講演会論文集, pp.689-694, 1987.
- 3) 長田信寿, 村本嘉雄, 内倉嘉彦, 細田 尚, 矢部昌之, 高田保彦, 岩田通明: 各種河道条件下における交互砂州の挙動について, 水工学論文集, 第43巻, pp.743-748, 1999.
- 4) 竹林洋史, 江頭進治, 中川博次: 直線水路における自己形成流路の形成条件と形成機構, 水工学論文集, 第44巻, pp.771-776, 2000.
- 5) Song, T. and Graf, W.H.: Non-Uniform open-channel flow over a rough bed, *J. of Hydrosci. and Hydraulic Eng.*, JSCE, vol.12, pp.1-25, 1994.
- 6) 古川恵太, 市村知也, 関根正人, 吉川秀夫: 水路床勾配が漸変する開水路流れ場の解析, 土木学会論文集, No.417/II-13, pp.63-71, 1990.
- 7) 瀬津家久, 門田章宏, 戸田孝史, 中川博次: 加速流および減速流の解析特性とその乱流特性,

- 土木学会論文集, No.509/II-30, pp.89-97, 1995.
- 8) 棚津家久, 鬼束幸樹, 藤田正樹: 開水路加速流の乱流特性に関する実験的研究, 土木学会論文集, No.642/II-50, pp.57-66, 2000.
- 9) Kennedy, J.F.: The mechanics of dunes and antidunes in erodible channels, *J. Fluid Mech.*, Vol.16, Part4, pp.521-554, 1963.
- 10) Hayashi, T.: Formation of dunes and antidunes in open channels, *Proc. ASCE*, Vol.96, HY12, pp.357-366, 1970.
- 11) Nakagawa, H. and Tsujimoto, T.: Sand bed instability due to bed load motion, *Proc. ASCE*, Vol.106, HY 12, pp.2029-2051, 1980.
- 12) 細田 尚, 村本嘉雄, 宮本雅章: 水深積分モデルによる波状路床上の流れの底面せん断応力解析, 土木学会論文集, No.558/II-38, pp.81-89, 1997.
- 13) 中川博次, 辻本哲郎: 河床波の発達性状に関する実験的考察, 京都大学防災研究所年報, 第19号B-2, pp. 289-309, 1976.
- 14) 中川博次, 辻本哲郎: 河床波スペクトルの形成に関する研究, 土木学会論文集, No.335, pp.107-115, 1983.
- 15) Engelund, F.: Closure to "Hydraulic Division, *ASCE*, Vol. 117, Paper No. 2528, 1952.
- 16) 岸 力, 黒木幹男: 移動床流れにおける河床形状と流体抵抗(I), 北海道大学工学部研究報告, pp. 1-23, 1972.
- 17) 山口里実, 泉 典洋: デューン・平坦床遷移過程にみられる亜臨界分岐現象, 土木学会論文集, No.740/II-64, pp. 75-94, 2003.
- 18) 細田 尚, 加藤隆彰: 水深積分モデルによる砂堆の発生・発達過程の数値シミュレーション, 水工学論文集, 第44巻, pp. 617-622, 2000.
- 19) 音田慎一郎, 細田 尚, 木村一郎: 加速・減速流の流速分布に関する簡易モデルとその水深積分モデルへの適用について, 水工学論文集, 第47巻, pp. 511-516, 2003.
- 20) Onda, S., Hosoda, T. and Kimura, I.: A simple model of a velocity distribution in accelerating/decelerating flows and its application to depth averaged flow model, *Proc. of Int. symposium on SHALLOW FLOWS*, Part II, pp. 295-301, 2003.
- 21) Engelund, F.: Flow and bed topography in channel bends, *Proc. ASCE*, Vol.100, HY 11, pp.1631-1648, 1974.
- 22) 音田慎一郎, 細田 尚: 水深積分モデルによる小規模河床波の発生・発達過程と流れの抵抗則の数値解析, 水工学論文集, 第48巻, pp. 973-978, 2004.
- 23) Onda, S. and Hosoda, T.: Numerical simulation on development process of dunes and flow resistance, *Proc. of the 2nd Int. conference on fluvial hydraulics, RIVER FLOW 2004*, Vol. 1, pp. 245-252, 2004.
- 24) 細田 尚, 多田章秀: 鉛直加速度を考慮した基礎式系による開水路流れ定在波の水面形解析, 水工学論文集, 第38巻, pp. 457-462, 1994.
- 25) Hino, M.: Equilibrium-range spectra of sand waves formed by flowing water, *J. Fluid Mech.*, Vol.34, part3, pp. 565-576, 1986.

- 26) 中川博次, 辻本哲郎 : Lower Regime における非定常移動床流れの抵抗の遅れ形状, 第 25 回水理講演会論文集, pp. 1-7, 1981.
- 27) Fredsoe, J. : The friction factor and height-length relation in flow over a dune-covered bed, Progressive Report 37, Institute of Hydrodynamics, Technical University of Denmark, 1975.
- 28) Yalin, M.S. and E. Karahan : Steepness of sedimentary dunes, *Proc. ASCE*, Vol.105, HY4, pp. 381-392, 1979.

## 第 5 章 主流の流速分布変化を考慮した湾曲流 の水深積分モデルとその検証

### 5.1 概説

河川、河道計画において、平面 2 次元モデルを用いた河川流、河床変動解析が汎用的となってきた。その際、河道湾曲部或いは蛇行部では、2 次流が生じるため、運動量輸送や底面せん断応力の評価に 2 次流の影響を考慮する必要がある。

2 次流のモデル化として一般的なものは Engelund モデル<sup>1)</sup>である。Engelund は、直交曲線座標系での運動方程式において、主流方向には定常等流を仮定し、主流方向流速の分布形を求めた。さらに、主流方向流速を横断方向の運動方程式に代入して、遠心力と圧力差に起因する 2 次流の分布形を導いた。

上記のモデルは、2 次流が流線の湾曲に遅れずに追従する場合について検討したものであるが、主流に対する 2 次流の遅れを考慮する必要性が村本・井上<sup>2)</sup>、池田・西村<sup>3)</sup>、Johannesson・Paker<sup>4)</sup>によって指摘された。そこで、細田ら<sup>5,6)</sup>は 2 次流及び 2 次流による横断方向の運動量輸送を水深積分モデルに組み込む方法を提案し、主流と 2 次流の遅れを考慮しない場合と遅れを考慮した場合の定式化を示した。導かれたモデルを Rozovskii<sup>7)</sup>、Hicks<sup>8)</sup>の実験に適用し、2 次流の発達・減衰を考慮することで実験結果とほぼ適合することを示した。但し、2 次流による運動量輸送などの算定の際に必要な流速分布の評価には、Engelund モデルを適用している。

一方、石川・金<sup>9)</sup>は、2 次流強度の縦断変化を解析する手法の確立を目的として、層流での 1 次元解析法の定式化を示している。彼らはまず、一様湾曲水路を対象に行われた実験データを考察することで、主流と 2 次流の干渉が 2 次流強度に大きな影響を及ぼすことを指摘し、Navier-Stokes 式中の主要項に移流項を考慮してモデル化した。さらに、導かれたモデルを一様湾曲水路及び蛇



行水路の実験結果と比較することでモデルの適合性を検証した。Blanckaert<sup>10)</sup>は、急激な一様湾曲水路において実験を行い、石川・金と同様に2次流によって主流方向流速が再分配(変形)され、最大流速点の dip が起こること、従来用いられている linear モデル、例えば Engelund モデルでは、湾曲パラメータが大きくなると運動量輸送を過大評価していることを指摘している。また、実験データを用いて運動方程式の各項のオーダーを比較することで、どの項が主流流速の変形に重要な役割を果たすか詳細に検討した。

流速分布の一様化或いは最大流速点の dip は、その他の一様湾曲水路や蛇行水路の実験<sup>11)</sup>においても確認されており、主流方向の流速分布変化が運動量輸送に大きな影響を及ぼすと考えられる。従って、実河川の流れや土砂輸送を精度よく予測するためには、主流流速分布の変化を考慮したモデルを水深積分モデルに組み込むことが必要となる。しかし、主流と2次流の干渉を考慮した上記のモデルでは、解析法が複雑なため、水深積分モデルに組み込むことが困難であると思われる。

そこで本研究では、平面2次元モデルに組み込み易い Engelund モデルを発展させ、2次流による主流の流速分布変化を考慮したモデル化について検討する。導かれたモデルを連続蛇行水路の実験に適用し、モデルの妥当性を検証する<sup>12)</sup>。

## 5.2 モデルの誘導過程

### 5.2.1 Engelund モデル

2次流による主流方向流速の変形を考慮した改良モデルを誘導する前に、その基となる Engelund モデルを簡単に紹介する。流線に沿った距離座標を  $s$ 、流線に局所的に直交する方向の曲線座標を  $n$  とし、 $s, n$  座標と直行方向に  $z$  軸をとる。 $s$  方向について、定常等流とすると、運動方程式は以下のように記述される。

$$\frac{1}{\rho} \frac{d\tau_{zs}}{dz} = -g \sin \theta \quad (5.1)$$

ここに、 $\tau_{zs}$  : セン断応力、 $g$  : 重力加速度、 $\theta$  : 路床勾配、 $\rho$  : 水の密度である。

渦動粘性係数  $\epsilon_s$  を鉛直方向に一定 ( $=\beta hu_s$ ,  $\beta=0.077$ ) としてセン断応力を表すと、式(5.1)は第3章の式(4.3)と一致する。これを  $z$  方向に積分すると主流方向流速が以下のように導かれる。

$$u_s = u_{sb} + \frac{u_*}{\beta h} \left( z - \frac{z^2}{2h} \right) \quad (5.2)$$

ここで、主流方向速分布(5.2)が式(5.3)を満足することを考慮すると、底面  $z = z_b$  (この場合  $z_b = 0$ ) での流速  $u_{sb}$  について式(5.4)が得られる。

$$hU_s = \int_{z_b}^s u_s dz \quad (5.3)$$

$$u_{sb} = U_s - \frac{u_*}{3\beta} \quad (5.4)$$

ここに、 $U_s$  は  $s$  方向の水深平均流速である。

底面流速  $u_{sb}$  と摩擦速度  $u_*$  の関係を式(5.5)のように  $r_*$  を用いて定義し、式(5.4)から  $u_{sb}$  を消去すると式(5.6)のように変形され、式(5.2)は最終的に式(5.7)となる。

$$u_{sb} = r_* u_* \quad (5.5)$$

$$u_* \left( r_* + \frac{1}{3\beta} \right) = U_s \quad (5.6)$$

$$\frac{u_s}{U_s} = \frac{\beta r_* + \zeta - \zeta^2/2}{1/3 + \beta r_*} \quad (5.7)$$

ここに、 $\zeta$  は相対水深であり、 $\zeta = z/h$  で定義される。

次に、得られた主流方向流速  $u_s$  を用いて、 $n$  方向の流速分布を求める。遠心力と圧力差により 2 次流が生じるとすると、 $n$  方向運動方程式は(5.8)となる。

$$\frac{u_s^2}{r} + \varepsilon_e \frac{d^2 u_n}{dz^2} - g \frac{\partial h}{\partial r} = 0 \quad (5.8)$$

式(5.8)に上記の  $u_s$  を代入すると式(5.9)となる。

$$\frac{U_s^2}{r(1/3 + \beta r_*)^2} \left\{ (\beta r_*)^2 + 2\beta r_* \zeta + (1 - \beta r_*) \zeta^2 - \zeta^3 + \frac{\zeta^4}{4} \right\} + \beta h u_* \frac{d^2 u_n}{dz^2} - g \frac{\partial h}{\partial r} = 0 \quad (5.9)$$

式(5.9)を  $z$  軸方向に積分し、以下の境界条件

$$\int_{z_b}^{z_s} u_n dz = 0, \quad \left. \frac{du_n}{dz} \right|_{z=z_s} = 0, \quad u_{nb} = \beta r_* h \left. \frac{du_n}{dz} \right|_{z=z_b} \quad (5.10)$$

を用いて整理すると、次のようになる。

$$\begin{aligned} & \frac{h U_s^2}{r(1/3 + \beta r_*)^2} \left\{ (\beta r_*)^2 \zeta + \beta r_* \zeta^2 + \frac{1 - \beta r_*}{3} \zeta^3 - \frac{\zeta^4}{4} + \frac{\zeta^5}{20} \right\} + \beta h u_* \frac{du_n}{dz} - \frac{u_* u_{nb}}{r_*} \\ & - \zeta \left[ \frac{h U_s^2}{r(1/3 + \beta r_*)^2} \left\{ (\beta r_*)^2 + \frac{2}{3} \beta r_* + \frac{2}{15} \right\} - \frac{u_*}{r_*} u_{nb} \right] = 0 \end{aligned} \quad (5.11)$$

さらに、式(5.11)を  $z$  軸方向に積分すると、式(5.12)を得る。

$$\begin{aligned} & \frac{h^2 U_s^2}{r(1/3 + \beta r_*)^2} \left\{ (\beta r_*)^2 \frac{\zeta^2}{2} + \beta r_* \frac{\zeta^3}{3} + \frac{1 - \beta r_*}{12} \zeta^4 - \frac{\zeta^5}{20} + \frac{\zeta^6}{120} \right\} \\ & + \beta h u_* (u_n - u_{nb}) - \frac{u_*}{r_*} u_{nb} h \zeta \\ & - \frac{h \zeta^2}{2} \left[ \frac{h U_s^2}{r(1/3 + \beta r_*)^2} \left\{ (\beta r_*)^2 + \frac{2}{3} \beta r_* + \frac{2}{15} \right\} - \frac{u_*}{r_*} u_{nb} \right] = 0 \end{aligned} \quad (5.12)$$

式(5.12)を  $z_b$  から  $z_s$  まで積分をし、整理すると  $u_{nb}$  について式(5.13)が得られる。

$$u_{nb} = \frac{-h U_s^2}{r(1/3 + \beta r_*)^3} \frac{r_*}{u_*} \frac{2}{5} \left( \frac{1}{9} \beta r_* + \frac{2}{63} \right) \quad (5.13)$$

式(5.12)から  $u_{nb}$  を消去すると、式(5.14)が得られ、2 次流の流速分布形が求められる。

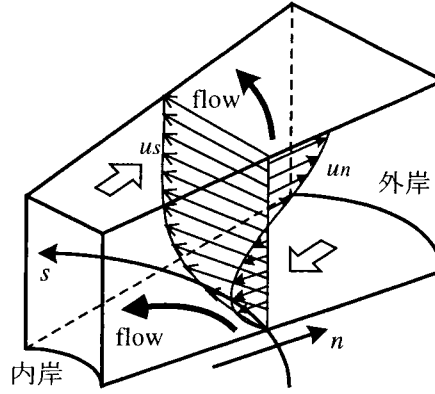


図-5.1 2次流の概念図

$$\begin{aligned}
 u_n = & U_s \frac{h}{r} \frac{U_s}{\beta u_*} \frac{1}{(1/3 + \beta r_*)^2} \left[ \left\{ (\beta r_*)^2 + \frac{2}{3} \beta r_* + \frac{2}{15} \right\} (\beta r_* + \zeta) \right. \\
 & \left. - (\beta r_*)^2 \frac{\zeta^2}{2} - \beta r_* \frac{\zeta^3}{3} - \frac{1 - \beta r_*}{12} \zeta^4 + \frac{1}{20} \zeta^5 - \frac{1}{120} \zeta^6 \right] \\
 & - U_s \frac{h}{r} \frac{U_s}{\beta u_*} \frac{1}{(1/3 + \beta r_*)^3} \left\{ (\beta r_*)^3 + (\beta r_*)^2 + \frac{2}{5} (\beta r_*) + \frac{2}{35} \right\} \left( \beta r_* + \zeta - \frac{\zeta^2}{2} \right) \quad (5.14)
 \end{aligned}$$

### 5.2.2 主流方向流速の変化を考慮した2次流のモデル化

2次流による主流方向流速の変形を考慮した改良モデルの誘導過程を示す。Blanckaert は、急激な一様湾曲水路において実験を行い、式(5.1)では、2次流による主流流速の変形がモデル化されておらず、主流方向の運動方程式において、

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial u_s}{\partial t} + \frac{u_s}{1+N} \frac{\partial u_s}{\partial s} + u_n \frac{\partial u_s}{\partial n} + u_z \frac{\partial u_s}{\partial z} + \frac{u_s u_n}{r} \\
 = -\frac{1}{1+N} \frac{\partial}{\partial s} \left( \frac{p}{\rho} \right) + \frac{\partial}{\partial s} \left( \frac{\tau_{ss}}{\rho} \right) + \frac{\partial}{\partial n} \left( \frac{\tau_{ns}}{\rho} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\tau_{zs}}{\rho} \right) + \frac{2}{1+N} \frac{\tau_{ns}}{\rho}
 \end{aligned}$$

移流項 (式(5.1)の左辺に加えるため-とする.)

$$- \left( u_n \frac{\partial u_s}{\partial n} + \frac{u_s u_n}{r} \right)$$

が主流方向流速の再分配に大きな役割を果たすことを指摘している。ここに、 $r$ : 曲率半径,  $N = n/R$ ,  $(1+N)R = r$  である。さらに彼は、第1項を

$$\frac{\partial u_s}{\partial n} = \alpha_s \frac{u_s}{r}$$

のように置き換え、主流方向流速分布を導いた。

そこで本研究では、Engelund モデルを応用し、上記の移流項を加えた運動方程式から主流と2次流の干渉を考慮したモデル化について検討する。但し、ここでは Blanckaert の検討を踏まえ、上記の移流項のうち  $-u_s u_n / r$  だけを加える。この物理的機構は図-5.1 を用いて次のように説明される。湾曲部では、2次流の影響によって表層では外岸側に、下層では内岸側に流れの向きを有す

る。そのとき、両層とも、 $u_s, r$  は正であるが、 $u_n$  については表層、下層でそれぞれ正、負となり、 $-u_s u_n / r$  全体として負、正となる。その結果、表層では主流流速を減速させ、逆に下層では加速させ、流速分布が一様化する。

次に、2次流による主流方向流速の変形を考慮したモデルの誘導過程について記述する。 $s$  方向および  $n$  方向流速の分布形を式(5.15), (5.16)のように相対水深 $\zeta$ に関する7次のべき乗表示で仮定する。

$$\frac{u_s}{U_s} = C_0 + C_1 \zeta + C_2 \zeta^2 + C_3 \zeta^3 + C_4 \zeta^4 + C_5 \zeta^5 + C_6 \zeta^6 + C_7 \zeta^7 \quad (5.15)$$

$$\frac{u_n}{U_s} = D_0 + D_1 \zeta + D_2 \zeta^2 + D_3 \zeta^3 + D_4 \zeta^4 + D_5 \zeta^5 + D_6 \zeta^6 + D_7 \zeta^7 \quad (5.16)$$

式(5.15), (5.16)を定常での  $s$  方向の運動方程式

$$-\frac{u_s u_n}{r} + g \sin \theta + \frac{\partial}{\partial z} \left( \varepsilon_e \frac{\partial u_s}{\partial z} \right) = 0 \quad (5.17)$$

に代入し、に代入し、以下の境界条件

$$\varepsilon_e \frac{\partial u_s}{\partial z} \Big|_{z=h} = 0$$

のもとで  $z$  軸方向について  $z$  から  $z_s$  まで積分すると、次式が得られる。

$$\begin{aligned} \varepsilon_e \frac{du_s}{dz} - u_s^2 (1 - \zeta) + \frac{h U_s^2}{r} \left[ C_0 D_0 (1 - \zeta) + (C_0 D_1 + C_1 D_0) \left( \frac{1}{2} - \frac{\zeta^2}{2} \right) + (C_0 D_2 + C_1 D_1 + C_2 D_0) \left( \frac{1}{3} - \frac{\zeta^3}{3} \right) \right. \\ + (C_0 D_3 + C_1 D_2 + C_2 D_1 + C_3 D_0) \left( \frac{1}{4} - \frac{\zeta^4}{4} \right) + (C_0 D_4 + C_1 D_3 + C_2 D_2 + C_3 D_1 + C_4 D_0) \left( \frac{1}{5} - \frac{\zeta^5}{5} \right) \\ + (C_0 D_5 + C_1 D_4 + C_2 D_3 + C_3 D_2 + C_4 D_1 + C_5 D_0) \left( \frac{1}{6} - \frac{\zeta^6}{6} \right) \\ + (C_0 D_6 + C_1 D_5 + C_2 D_4 + C_3 D_3 + C_4 D_2 + C_5 D_1 + C_6 D_0) \left( \frac{1}{7} - \frac{\zeta^7}{7} \right) \\ \left. + (C_0 D_7 + C_1 D_6 + C_2 D_5 + C_3 D_4 + C_4 D_3 + C_5 D_2 + C_6 D_1 + C_7 D_0) \left( \frac{1}{8} - \frac{\zeta^8}{8} \right) \right] = 0 \end{aligned} \quad (5.18)$$

さらに、 $z$  方向に積分し、7次のオーダーまで整理すると、式(5.19)が得られる。

$$\begin{aligned} u_s - u_{sb} - \frac{u_s^2 h}{\varepsilon_e} \left( \zeta - \frac{\zeta^2}{2} \right) \\ + \frac{h^2 U_s^2}{\varepsilon_e r} \left[ \left\{ C_0 D_0 + \frac{1}{2} (C_0 D_1 + C_1 D_0) + \frac{1}{3} (C_0 D_2 + C_1 D_1 + C_2 D_0) \right. \right. \\ + \frac{1}{4} (C_0 D_3 + C_1 D_2 + C_2 D_1 + C_3 D_0) + \frac{1}{5} (C_0 D_4 + C_1 D_3 + C_2 D_2 + C_3 D_1 + C_4 D_0) \\ \left. \left. + \frac{1}{6} (C_0 D_5 + C_1 D_4 + C_2 D_3 + C_3 D_2 + C_4 D_1 + C_5 D_0) \right\} \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{1}{7}(C_0 D_6 + C_1 D_5 + C_2 D_4 + C_3 D_3 + C_4 D_2 + C_5 D_1 + C_6 D_0) \\
 & + \frac{1}{8}(C_0 D_7 + C_1 D_6 + C_2 D_5 + C_3 D_4 + C_5 D_2 + C_6 D_1 + C_7 D_0) \Big\} \zeta \\
 & + \left\{ -\frac{C_0 D_0}{2} \right\} \zeta^2 + \left\{ -\frac{1}{6}(C_0 D_1 + C_1 D_0) \right\} \zeta^3 + \left\{ -\frac{1}{12}(C_0 D_2 + C_1 D_1 + C_2 D_0) \right\} \zeta^4 \\
 & + \left\{ -\frac{1}{20}(C_0 D_3 + C_1 D_2 + C_2 D_1 + C_3 D_0) \right\} \zeta^5 + \left\{ -\frac{1}{30}(C_0 D_4 + C_1 D_3 + C_2 D_2 + C_3 D_1 + C_4 D_0) \right\} \zeta^6 \\
 & + \left\{ -\frac{1}{42}(C_0 D_5 + C_1 D_4 + C_2 D_3 + C_3 D_2 + C_4 D_1 + C_5 D_0) \right\} \zeta^7 \Big] = 0 \tag{5.19}
 \end{aligned}$$

次に,  $n$  方向流速の分布形を誘導する.  $n$  方向の運動方程式において主要項を取り出すと, 式(5.8)で表される. 式(5.15), (5.16)を式(5.8)に代入し, 式(5.10)の境界条件のもとで  $z_b$  から  $z$  まで積分すると式(5.20)が得られる.

$$\begin{aligned}
 & \frac{hU_s^2}{r} \left\{ C_0^2 \zeta + C_0 C_1 \zeta^2 + \frac{1}{3}(2C_0 C_2 + C_1^2) \zeta^3 + \frac{1}{2}(C_0 C_3 + C_1 C_2) \zeta^4 \right. \\
 & + \frac{1}{5}(2C_0 C_4 + 2C_1 C_3 + C_2^2) \zeta^5 + \frac{1}{3}(C_0 C_5 + C_1 C_4 + C_2 C_3) \zeta^6 \\
 & + \frac{1}{7}(2C_0 C_6 + 2C_1 C_5 + 2C_2 C_4 + C_3^2) \zeta^7 + \frac{1}{4}(C_0 C_7 + C_1 C_6 + C_2 C_5 + C_3 C_4) \zeta^8 \Big\} \\
 & + \beta h u_* \left( \frac{\partial u_n}{\partial z} - \frac{u_{nb}}{\beta h r_*} \right) - g \frac{\partial h}{\partial n} z = 0 \tag{5.20}
 \end{aligned}$$

ここで, 式(5.8)を  $z_b$  から  $h$  まで積分した

$$\begin{aligned}
 & \frac{hU_s^2}{r} \left\{ C_0^2 + C_0 C_1 + \frac{1}{3}(2C_0 C_2 + C_1^2) + \frac{1}{2}(C_0 C_3 + C_1 C_2) \right. \\
 & + \frac{1}{5}(2C_0 C_4 + 2C_1 C_3 + C_2^2) + \frac{1}{3}(C_0 C_5 + C_1 C_4 + C_2 C_3) \\
 & + \frac{1}{7}(2C_0 C_6 + 2C_1 C_5 + 2C_2 C_4 + C_3^2) + \frac{1}{4}(C_0 C_7 + C_1 C_6 + C_2 C_5 + C_3 C_4) \Big\} \\
 & - \beta h u_* \frac{u_{nb}}{\beta h r_*} - g h \frac{\partial h}{\partial n} = 0
 \end{aligned}$$

を用いて, 式(5.20)の左辺最終項を消去すると, 以下のようなになる.

$$\begin{aligned}
 & \frac{hU_s^2}{r} \left\{ C_0^2 \zeta + C_0 C_1 \zeta^2 + \frac{1}{3}(2C_0 C_2 + C_1^2) \zeta^3 + \frac{1}{2}(C_0 C_3 + C_1 C_2) \zeta^4 \right. \\
 & + \frac{1}{5}(2C_0 C_4 + 2C_1 C_3 + C_2^2) \zeta^5 + \frac{1}{3}(C_0 C_5 + C_1 C_4 + C_2 C_3) \zeta^6 \\
 & + \frac{1}{7}(2C_0 C_6 + 2C_1 C_5 + 2C_2 C_4 + C_3^2) \zeta^7 + \frac{1}{4}(C_0 C_7 + C_1 C_6 + C_2 C_5 + C_3 C_4) \zeta^8 \Big\}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \beta h u_* \frac{\partial u_n}{\partial z} - \frac{u_* u_{nb}}{r_*} - \zeta \left[ \frac{h U_s^2}{r} \left\{ C_0^2 + C_0 C_1 + \frac{1}{3} (2 C_0 C_2 + C_1^2) \right. \right. \\
 & + \frac{1}{2} (C_0 C_3 + C_1 C_2) + \frac{1}{5} (2 C_0 C_4 + 2 C_1 C_3 + C_2^2) + \frac{1}{3} (C_0 C_5 + C_1 C_4 + C_2 C_3) \\
 & + \frac{1}{7} (2 C_0 C_6 + 2 C_1 C_5 + 2 C_2 C_4 + C_3^2) + \frac{1}{4} (C_0 C_7 + C_1 C_6 + C_2 C_5 + C_3 C_4) \left. \right\} \\
 & + \frac{1}{7} (2 C_0 C_6 + 2 C_1 C_5 + 2 C_2 C_4 + C_3^2) + \frac{1}{4} (C_0 C_7 + C_1 C_6 + C_2 C_5 + C_3 C_4) \left. \right\} - \frac{u_* u_{nb}}{r_*} \Big] = 0 \quad (5.21)
 \end{aligned}$$

さらに、式(5.21)を $z$ 方向に積分すると、式(5.22)が得られる。

$$\begin{aligned}
 & \frac{h^2 U_s^2}{r} \left\{ \frac{1}{2} C_0^2 \zeta^2 + \frac{1}{3} C_0 C_1 \zeta^3 + \frac{1}{12} (2 C_0 C_2 + C_1^2) \zeta^4 + \frac{1}{10} (C_0 C_3 + C_1 C_2) \zeta^5 \right. \\
 & + \frac{1}{30} (2 C_0 C_4 + 2 C_1 C_3 + C_2^2) \zeta^6 + \frac{1}{21} (C_0 C_5 + C_1 C_4 + C_2 C_3) \zeta^7 \\
 & + \frac{1}{56} (2 C_0 C_6 + 2 C_1 C_5 + 2 C_2 C_4 + C_3^2) \zeta^8 + \frac{1}{36} (C_0 C_7 + C_1 C_6 + C_2 C_5 + C_3 C_4) \zeta^9 \\
 & + \beta h u_* (u_n - u_{nb}) - \frac{u_*}{r_*} h u_{nb} \zeta - \frac{\zeta^2}{2} \left[ \frac{h^2 U_s^2}{r} \left\{ C_0^2 + C_0 C_1 + \frac{1}{3} (2 C_0 C_2 + C_1^2) \right. \right. \\
 & + \frac{1}{2} (C_0 C_3 + C_1 C_2) + \frac{1}{5} (2 C_0 C_4 + 2 C_1 C_3 + C_2^2) + \frac{1}{3} (C_0 C_5 + C_1 C_4 + C_2 C_3) \\
 & + \frac{1}{7} (2 C_0 C_6 + 2 C_1 C_5 + 2 C_2 C_4 + C_3^2) + \frac{1}{4} (C_0 C_7 + C_1 C_6 + C_2 C_5 + C_3 C_4) \left. \right\} - \frac{h u_* u_{nb}}{r_*} \left. \right] = 0 \quad (5.22)
 \end{aligned}$$

式(5.22)を7次のオーダーまで整理すると式(5.23)を得る。

$$\begin{aligned}
 & \frac{u_n}{U_s} = \frac{u_{nb}}{U_s} + \frac{1}{\beta r_*} \frac{u_{nb}}{U_s} \zeta \\
 & - \frac{1}{\beta h u_*} \frac{1}{U_s} \left[ - \frac{1}{2} \frac{h^2 U_s^2}{r} \left\{ C_0 C_1 + \frac{1}{3} (2 C_0 C_2 + C_1^2) + \frac{1}{2} (C_0 C_3 + C_1 C_2) + \frac{1}{5} (2 C_0 C_4 + 2 C_1 C_3 + C_2^2) \right. \right. \\
 & + \frac{1}{3} (C_0 C_5 + C_1 C_4 + C_2 C_3) + \frac{1}{7} (2 C_0 C_6 + 2 C_1 C_5 + 2 C_2 C_4 + C_3^2) \\
 & + \frac{1}{4} (C_0 C_7 + C_1 C_6 + C_2 C_5 + C_3 C_4) \left. \right\} + \frac{h u_* u_{nb}}{2 r_*} \Big] \zeta^2 - \frac{1}{\beta h u_*} \frac{1}{U_s} \frac{h^2 U_s^2}{r} \frac{1}{3} C_0 C_1 \zeta^3 \\
 & - \frac{1}{\beta h u_*} \frac{1}{U_s} \frac{h^2 U_s^2}{r} \frac{1}{12} (2 C_0 C_2 + C_1^2) \zeta^4 - \frac{1}{\beta h u_*} \frac{1}{U_s} \frac{h^2 U_s^2}{r} \frac{1}{10} (C_0 C_3 + C_1 C_2) \zeta^5 \\
 & - \frac{1}{\beta h u_*} \frac{1}{U_s} \frac{h^2 U_s^2}{r} \frac{1}{30} (2 C_0 C_4 + 2 C_1 C_3 + C_2^2) \zeta^6 \\
 & - \frac{1}{\beta h u_*} \frac{1}{U_s} \frac{h^2 U_s^2}{r} \frac{1}{21} (C_0 C_5 + C_1 C_4 + C_2 C_3) \zeta^7 \quad (5.23)
 \end{aligned}$$

さらに、式(5.15)、(5.16)が式(5.3)、(5.10)の平均流速の関係を満足することから、以下の式が得

られる.

$$C_0 + \frac{1}{2}C_1 + \frac{1}{3}C_2 + \frac{1}{4}C_3 + \frac{1}{5}C_4 + \frac{1}{6}C_5 + \frac{1}{7}C_6 + \frac{1}{8}C_7 = 1 \quad (5.24)$$

$$D_0 + \frac{1}{2}D_1 + \frac{1}{3}D_2 + \frac{1}{4}D_3 + \frac{1}{5}D_4 + \frac{1}{6}D_5 + \frac{1}{7}D_6 + \frac{1}{8}D_7 = 0 \quad (5.25)$$

式(5.15), (5.16)と式(5.19), (5.23)を比較することにより, 式(5.15), (5.16)中の係数について以下の関係式が導かれる.

$$C_0 = \frac{u_{sb}}{U_s} = \frac{r_* u_*}{U_s} \quad (5.26a)$$

$$\begin{aligned} C_1 = \frac{C_0}{\beta r_*} - \delta \bigg[ & C_0 D_0 + \frac{1}{2}(C_0 D_1 + C_1 D_0) + \frac{1}{3}(C_0 D_2 + C_1 D_1 + C_2 D_0) \\ & + \frac{1}{4}(C_0 D_3 + C_1 D_2 + C_2 D_1 + C_3 D_0) + \frac{1}{5}(C_0 D_4 + C_1 D_3 + C_2 D_2 + C_3 D_1 + C_4 D_0) \\ & + \frac{1}{6}(C_0 D_5 + C_1 D_4 + C_2 D_3 + C_3 D_2 + C_4 D_1 + C_5 D_0) \\ & + \frac{1}{7}(C_0 D_6 + C_1 D_5 + C_2 D_4 + C_3 D_3 + C_4 D_2 + C_5 D_1 + C_6 D_0) \\ & + \frac{1}{8}(C_0 D_7 + C_1 D_6 + C_2 D_5 + C_3 D_4 + C_4 D_3 + C_5 D_2 + C_6 D_1 + C_7 D_0) \bigg] \end{aligned} \quad (5.26b)$$

$$C_2 = -\frac{1}{2} \frac{C_0}{\beta r_*} + \frac{1}{2} \delta C_0 D_0 \quad (5.26c)$$

$$C_3 = \frac{1}{6} \delta (C_0 D_1 + C_1 D_0) \quad (5.26d)$$

$$C_4 = \frac{1}{12} \delta (C_0 D_2 + C_1 D_1 + C_2 D_0) \quad (5.26e)$$

$$C_5 = \frac{1}{20} \delta (C_0 D_3 + C_1 D_2 + C_2 D_1 + C_3 D_0) \quad (5.26f)$$

$$C_6 = \frac{1}{30} \delta (C_0 D_4 + C_1 D_3 + C_2 D_2 + C_3 D_1 + C_4 D_0) \quad (5.26g)$$

$$C_7 = \frac{1}{42} \delta (C_0 D_5 + C_1 D_4 + C_2 D_3 + C_3 D_2 + C_4 D_1 + C_5 D_0) \quad (5.26h)$$

$$D_0 = \frac{u_{nb}}{U_s} \quad (5.27a)$$

$$D_1 = \frac{D_0}{\beta r_*} \quad (5.27b)$$

$$D_2 = \frac{1}{2} \delta \left[ C_0 C_1 + \frac{2}{3} C_0 C_2 + \frac{1}{3} C_1^2 + \frac{1}{2} C_0 C_3 + \frac{1}{2} C_1 C_2 + \frac{2}{5} C_0 C_4 + \frac{2}{5} C_1 C_3 + \frac{1}{5} C_2^2 \right]$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{1}{3}C_0C_5 + \frac{1}{3}C_1C_4 + \frac{1}{3}C_2C_3 + \frac{2}{7}C_0C_6 + \frac{2}{7}C_1C_5 + \frac{2}{7}C_2C_4 + \frac{1}{7}C_3^2 \\
 & + \frac{1}{4}C_0C_7 + \frac{1}{4}C_1C_6 + \frac{1}{4}C_2C_5 + \frac{1}{4}C_3C_4 \Big] - \frac{1}{2} \frac{D_0}{\beta r_*}
 \end{aligned} \tag{5.27c}$$

$$D_3 = -\frac{1}{3}\delta C_0C_1 \tag{5.27d}$$

$$D_4 = -\frac{1}{12}\delta(2C_0C_2 + C_1^2) \tag{5.27e}$$

$$D_5 = -\frac{1}{10}\delta(C_0C_3 + C_1C_2) \tag{5.27f}$$

$$D_6 = -\frac{1}{30}\delta(2C_0C_4 + 2C_1C_3 + C_2^2) \tag{5.27g}$$

$$D_7 = -\frac{1}{21}\delta(C_0C_5 + C_1C_4 + C_2C_3) \tag{5.27h}$$

ここに,

$$\delta = \frac{hU_s}{\beta r_* u_*}$$

である.

### 5.2.3 計算手順

式(5.26), (5.27)中の $\delta$ 及び $r_*$ を既知量とする. そのとき, 係数 $C_0 \sim C_7$ ,  $D_0 \sim D_7$ を求める計算手順は以下になる. ここでは, 簡易に求めることを考える.

- 1) 係数 $C$ において,  $\delta$ を0とした式(5.26a)–(5.26c)を式(5.24)に代入し,  $C_0$ ,  $C_1$ ,  $C_2$ を求める.
- 2) 得られた $C$ 及び $\delta$ を式(5.27)に代入し, 式(5.25)を満足するように $D_0 \sim D_7$ を計算する.
- 3)  $D_0 \sim D_7$ 及び $\delta$ を式(5.26)に代入し, 再度 $C_0 \sim C_7$ を求める. 但し, このままでは平均流速の関係式(5.24)を満足しないため, 式(5.24)を満たすよう $C_0$ ,  $C_1$ を求め直す. その際, 式(5.5)及び底面せん断応力の定義式

$$\beta h u_* \frac{\partial u_*}{\partial z} \Big|_{z=z_b} = u_*^2 \tag{5.28}$$

から $C_0$ と $C_1$ の関係が $C_0 = \beta r_* C_1$ で表され, この関係式を用いて $C_0$ ,  $C_1$ を決定する. ここで, 手順1), 2)で求められる係数を用いて計算した流速分布形はEngelundモデルと一致する.

次に, 運動量輸送係数の計算方法について記述する. 主流及び横断方向の流速分布を

$$\begin{aligned}
 u_s &= U_s \cdot f_s(\zeta) \\
 u_n &= A_n \cdot f_n(\zeta), \quad A_n = U_s h / r
 \end{aligned}$$

で表した場合, 運動量輸送係数 $c_{s2}$ ,  $c_{sn}$ ,  $c_{n2}$ は次式で定義される.

$$c_{s2} = \int f_s(\zeta)^2 d\zeta \tag{5.29}$$



$$c_{sn} = \int_0^1 f_s(\zeta) f_n(\zeta) d\zeta \quad (5.30)$$

$$c_{n2} = \int_0^1 f_n(\zeta)^2 d\zeta \quad (5.31)$$

ここに、 $c_{s2}$ 、 $c_{n2}$  は  $s$  方向、 $n$  方向の運動量輸送係数であり、 $c_{sn}$  は遠心力の  $s$  方向成分に関する係数である。

本モデルにおける運動量輸送係数を求める。流速分布式(5.15)、(5.16)から  $f_s(\zeta)$ 、 $f_n(\zeta)$  は以下のよう表される。

$$f_s(\zeta) = C_0 + C_1\zeta + C_2\zeta^2 + C_3\zeta^3 + C_4\zeta^4 + C_5\zeta^5 + C_6\zeta^6 + C_7\zeta^7 \quad (5.32)$$

$$f_n(\zeta) = D'_0 + D'_1\zeta + D'_2\zeta^2 + D'_3\zeta^3 + D'_4\zeta^4 + D'_5\zeta^5 + D'_6\zeta^6 + D'_7\zeta^7 \quad (5.33)$$

ここで、 $f_n(\zeta)$  を求める際、 $\delta$  から  $A_n$  に含まれる  $h/r$  と  $U_s/u_*$  に分離し、摩擦速度  $u_*$  と  $U_s$  の関係については式(5.28)から求めた。また、 $D'_0$  から  $D'_7$  は  $D_0$  から  $D_7$  を用いて次のように変換される。

$$D'_0 = \frac{1}{\beta^2 C_1 \delta} D_0, \quad D'_1 = \frac{1}{\beta^2 C_1 \delta} D_1, \quad D'_2 = \frac{1}{\beta^2 C_1 \delta} D_2, \quad D'_3 = \frac{1}{\beta^2 C_1 \delta} D_3,$$

$$D'_4 = \frac{1}{\beta^2 C_1 \delta} D_4, \quad D'_5 = \frac{1}{\beta^2 C_1 \delta} D_5, \quad D'_6 = \frac{1}{\beta^2 C_1 \delta} D_6, \quad D'_7 = \frac{1}{\beta^2 C_1 \delta} D_7$$

従って、運動量輸送係数は以下のように求められる。

$$\begin{aligned} c_{s2} = & C_0^2 + C_0 C_1 + \frac{1}{3}(2C_0 C_2 + C_1^2) + \frac{1}{4}(2C_0 C_3 + 2C_1 C_2) + \frac{1}{5}(2C_0 C_4 + 2C_1 C_3 + C_2^2) \\ & + \frac{1}{6}(2C_0 C_5 + 2C_1 C_4 + 2C_2 C_3) + \frac{1}{7}(2C_0 C_6 + 2C_1 C_5 + 2C_2 C_4 + C_3^2) \\ & + \frac{1}{8}(2C_0 C_7 + 2C_1 C_6 + 2C_2 C_5 + 2C_3 C_4) + \frac{1}{9}(2C_1 C_7 + 2C_2 C_6 + 2C_3 C_5 + C_4^2) \\ & + \frac{1}{10}(2C_2 C_7 + 2C_3 C_6 + 2C_4 C_5) + \frac{1}{11}(2C_3 C_7 + 2C_4 C_6 + C_5^2) + \frac{1}{12}(2C_4 C_7 + 2C_5 C_6) \\ & + \frac{1}{13}(2C_5 C_7 + C_6^2) + \frac{1}{14} 2C_6 C_7 + \frac{1}{15} C_7^2 \end{aligned} \quad (5.34)$$

$$\begin{aligned} c_{sn} = & C_0 D'_1 + \frac{1}{2}(C_0 D'_1 + C_1 D'_0) + \frac{1}{3}(C_0 D'_2 + C_1 D'_1 + C_2 D'_0) + \frac{1}{4}(C_0 D'_3 + C_1 D'_2 + C_2 D'_1 + C_3 D'_0) \\ & + \frac{1}{5}(C_0 D'_4 + C_1 D'_3 + C_2 D'_2 + C_3 D'_1 + C_4 D'_0) + \frac{1}{6}(C_0 D'_5 + C_1 D'_4 + C_2 D'_3 + C_3 D'_2 + C_4 D'_1 + C_5 D'_0) \\ & + \frac{1}{7}(C_0 D'_6 + C_1 D'_5 + C_2 D'_4 + C_3 D'_3 + C_4 D'_2 + C_5 D'_1 + C_6 D'_0) \\ & + \frac{1}{8}(C_0 D'_7 + C_1 D'_6 + C_2 D'_5 + C_3 D'_4 + C_4 D'_3 + C_5 D'_2 + C_6 D'_1 + C_7 D'_0) \\ & + \frac{1}{9}(C_1 D'_7 + C_2 D'_6 + C_3 D'_5 + C_4 D'_4 + C_5 D'_3 + C_6 D'_2 + C_7 D'_1) \end{aligned}$$

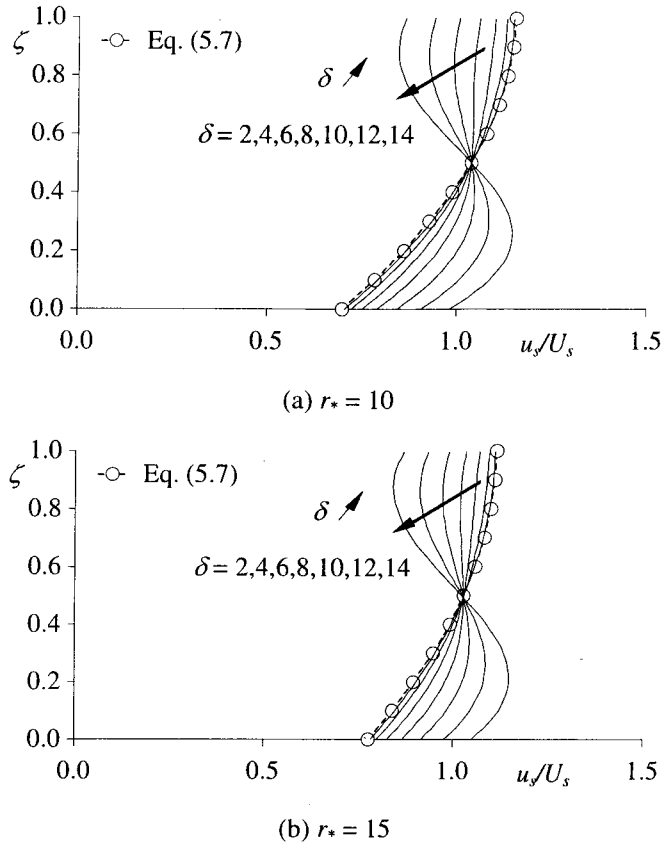


図-5.2 本モデルにおける主流方向の流速分布

$$\begin{aligned}
 & + \frac{1}{10} (C_2 D_7' + C_3 D_6' + C_4 D_5' + C_5 D_4' + C_6 D_3' + C_7 D_2') + \frac{1}{11} (C_3 D_7' + C_4 D_6' + C_5 D_5' + C_6 D_4' + C_7 D_3') \\
 & + \frac{1}{12} (C_4 D_7' + C_5 D_6' + C_6 D_5' + C_7 D_4') + \frac{1}{13} (C_5 D_7' + C_6 D_6' + C_7 D_5') + \frac{1}{14} (C_6 D_7' + C_7 D_6') + \frac{1}{15} C_7 D_7'
 \end{aligned} \quad (5.35)$$

$$\begin{aligned}
 c_{n2} = & D_0'^2 + D_0' D_1' + \frac{1}{3} (2D_0' D_2' + D_1'^2) + \frac{1}{4} (2D_0' D_3' + 2C_1 C_2) + \frac{1}{5} (2D_0' D_4' + 2D_1' D_3' + D_2'^2) \\
 & + \frac{1}{6} (2D_0' D_5' + 2D_1' D_4' + 2D_2' D_3') + \frac{1}{7} (2D_0' D_6' + 2D_1' D_5' + 2D_2' D_4' + D_3'^2) \\
 & + \frac{1}{8} (2D_0' D_7' + 2D_1' D_6' + 2D_2' D_5' + 2D_3' D_4') + \frac{1}{9} (2D_1' D_7' + 2D_2' D_6' + 2D_3' D_5' + D_4'^2) \\
 & + \frac{1}{10} (2D_2' D_7' + 2D_3' D_6' + 2D_4' D_5') + \frac{1}{11} (2D_3' D_7' + 2D_4' D_6' + D_5'^2) + \frac{1}{12} (2D_4' D_7' + 2D_5' D_6') \\
 & + \frac{1}{13} (D_5' D_7' + D_6'^2) + \frac{1}{14} 2D_6' D_7' + \frac{1}{15} D_7'^2
 \end{aligned} \quad (5.36)$$

#### 5.2.4 本モデルにおける流速分布，運動量輸送係数の基本的特性

本モデルにおける流速分布形，運動量輸送係数の基本的特性について考察する。図-5.2 は，式

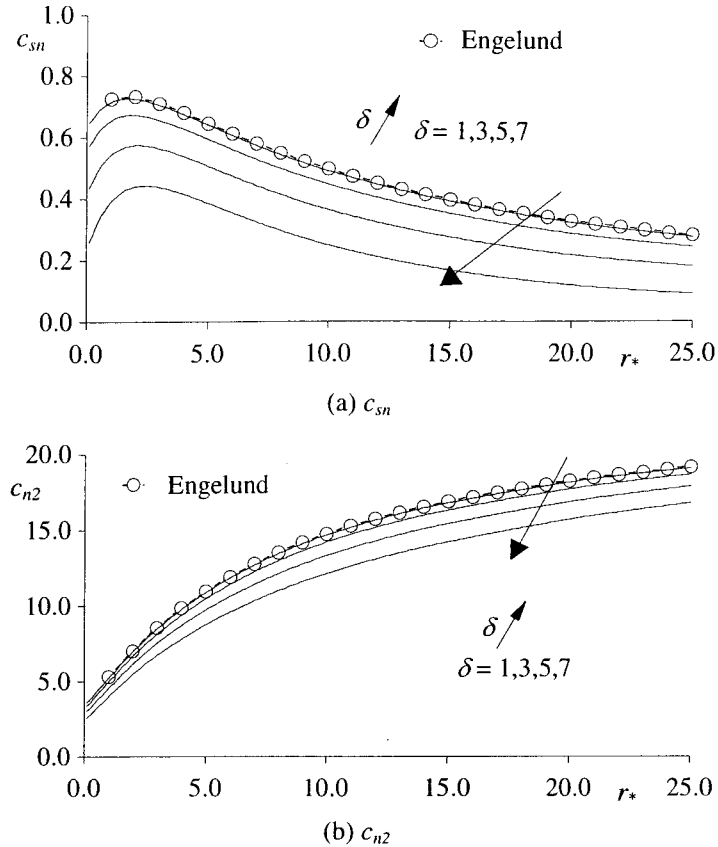


図-5.3 本モデルにおける主流方向の流速分布

(5.26), (5.27)中の $\delta$ 及び $r_*$ を変化させ、主流方向流速分布について比較したものである。図をみると、パラメータ $\delta$ の値が小さいとき、主流方向流速は等流の分布（Engelund モデル）とほぼ一致しているが、 $\delta$ の値が大きくなると、2 次流の影響が強くなり、主流方向流速が変形することがわかる。その結果、流速分布の一樣化或いは最大流速点の dip が生じている。

図-5.3 は、 $\delta$ 及び $r_*$ を変化させ、運動量輸送係数について Engelund モデルと比較したものである。流速分布形と同じように、パラメータ $\delta$ の値が小さい場合、運動量輸送係数は Engelund モデルとほぼ一致している。しかし、 $\delta$ の値が大きくなると、2 次流によって主流方向流速が変形し、一樣化するため、2 次流強度が弱くなり、運動量輸送係数が Engelund モデルよりも小さくなっている。従って、Engelund モデルが運動量輸送を過大評価しているという Blanckaert の指摘と一致している。

### 5.3 モデルの適用

本モデルを国土技術研究センターによって行われた連続蛇行水路実験<sup>13)</sup>に適用し、モデルの妥当性を検証する。実験水路の諸元及び実験条件を図-5.4、表-5.1 に示す。計測区間は No.8 から No.0 であり（図-5.4(a)）、水位、流速はそれぞれポイントゲージ、電磁流速計で測定されている。断面内の流速の測定点を図-5.4(b)に示す。

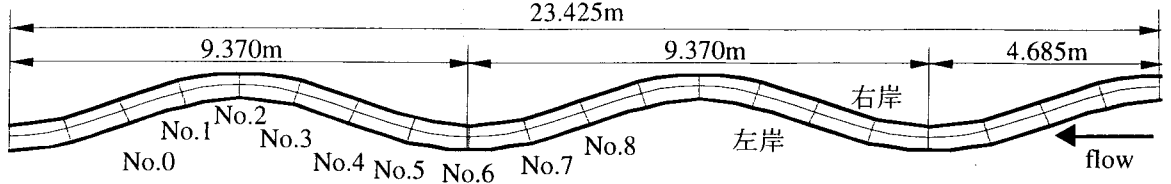


図-5.4(a) 実験水路の概要

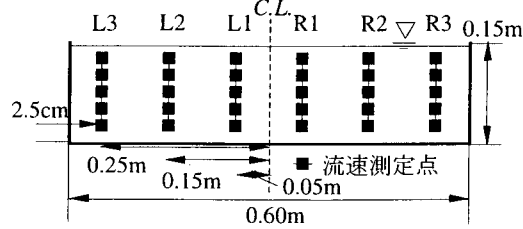


図-5.4(b) 実験水路の断面図

表-5.1 実験の水理量

$Q$ ( $\text{m}^3/\text{s}$ )	$h$ (m)	$B$ (m)	$U_m$ (m/s)	$\sin \theta$	$Fr$
0.04	0.143	0.6	0.47	1/2000	0.4

ここに、 $Q$ : 流量,  $h$ : 水深,  $B$ : 水路幅,  $U_m$ : 平均流速,  $\sin \theta$ : 水路勾配,  $Fr$ : フルード数

実験結果と比較する場合, 流速分布式中の係数  $C$ ,  $D$  を計算するには,  $\delta$  の値が必要となる. そこで便宜的ではあるが, 細田らが Englund モデルを 2 次流モデルに組み込んだ水深積分モデル<sup>6)</sup>を用いて数値解析を行い,  $\delta$  の値を求めた. その際, 主流と 2 次流の遅れを考慮する場合としない場合が考えられるが, 本研究では位相差を考慮していないため, 遅れを考慮しないモデルを適用した. 基礎式は以下のように表される.

[連続式]

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{h}{J} \right) + \frac{\partial}{\partial \xi} \left( \frac{Uh}{J} \right) + \frac{\partial}{\partial \eta} \left( \frac{Vh}{J} \right) = 0 \quad (5.37)$$

[運動量方程式]

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{Q^\xi}{J} \right) + \frac{\partial}{\partial \xi} \left( \frac{UQ^\xi}{J} \right) + \frac{\partial}{\partial \eta} \left( \frac{VQ^\xi}{J} \right) - \frac{M}{J} \left( U \frac{\partial \xi_x}{\partial \xi} + V \frac{\partial \xi_x}{\partial \eta} \right) - \frac{N}{J} \left( U \frac{\partial \xi_y}{\partial \xi} + V \frac{\partial \xi_y}{\partial \eta} \right) \\ &= -gh \left( \frac{\xi_x^2 + \xi_y^2}{J} \frac{\partial z_s}{\partial \xi} + \frac{\xi_x \eta_x + \xi_y \eta_y}{J} \frac{\partial z_s}{\partial \eta} \right) - \frac{\tau_b^\xi}{\rho J} + \frac{\xi_x^2}{J} \frac{\partial}{\partial \xi} \left( -\overline{u'^2} h \right) + \frac{\xi_x \eta_x}{J} \frac{\partial}{\partial \eta} \left( -\overline{u'^2} h \right) \\ &+ \frac{\xi_y^2}{J} \frac{\partial}{\partial \xi} \left( -\overline{v'^2} h \right) + \frac{\xi_y \eta_y}{J} \frac{\partial}{\partial \eta} \left( -\overline{v'^2} h \right) + \frac{\xi_x \eta_y + \xi_y \eta_x}{J} \frac{\partial}{\partial \eta} \left( -\overline{u'v'} h \right) + \frac{2\xi_x \xi_y}{J} \frac{\partial}{\partial \xi} \left( -\overline{u'v'} h \right) \\ &+ \xi_x (S_{\xi 1} + S_{\xi 2} + S_{\xi 3} + S_{\xi 4}) + \xi_y (S_{\eta 1} + S_{\eta 2} + S_{\eta 3} + S_{\eta 4}) \end{aligned} \quad (5.38)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{Q^\eta}{J} \right) + \frac{\partial}{\partial \xi} \left( \frac{UQ^\eta}{J} \right) + \frac{\partial}{\partial \eta} \left( \frac{VQ^\eta}{J} \right) - \frac{M}{J} \left( U \frac{\partial \eta_x}{\partial \xi} + V \frac{\partial \eta_x}{\partial \eta} \right) - \frac{N}{J} \left( U \frac{\partial \eta_y}{\partial \xi} + V \frac{\partial \eta_y}{\partial \eta} \right)$$

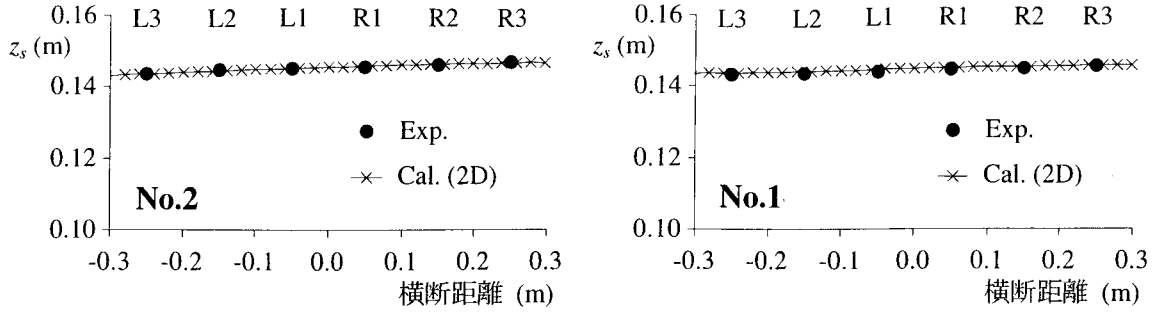


図-5.5 水位の横断分布の比較

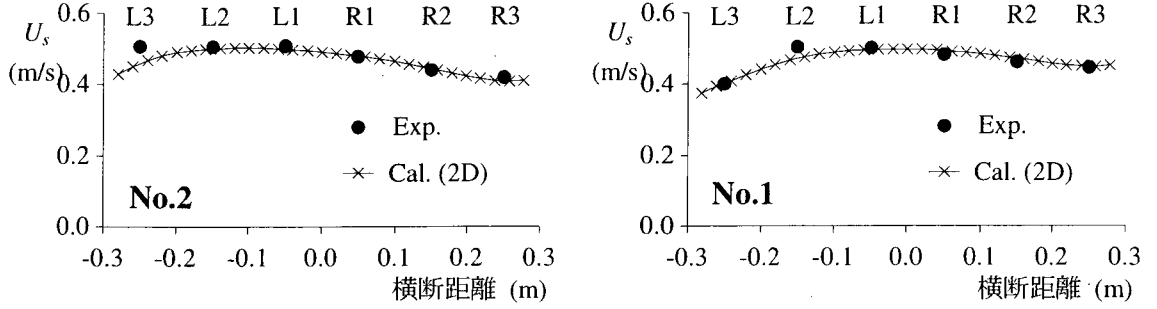


図-5.6 水深平均流速の横断分布の比較

$$\begin{aligned}
 &= -gh \left( \frac{\xi_x \eta_x + \xi_y \eta_y}{J} \frac{\partial z_s}{\partial \xi} + \frac{\eta_x^2 + \eta_y^2}{J} \frac{\partial z_s}{\partial \eta} \right) - \frac{\tau_b^n}{\rho J} + \frac{\xi_x \eta_x}{J} \frac{\partial}{\partial \xi} \left( -\overline{u'^2} h \right) + \frac{\eta_x^2}{J} \frac{\partial}{\partial \eta} \left( -\overline{u'^2} h \right) \\
 &+ \frac{\xi_y \eta_y}{J} \frac{\partial}{\partial \xi} \left( -\overline{v'^2} h \right) + \frac{\eta_y^2}{J} \frac{\partial}{\partial \eta} \left( -\overline{v'^2} h \right) + \frac{\xi_x \eta_y + \xi_y \eta_x}{J} \frac{\partial}{\partial \xi} \left( -\overline{u'v'} h \right) + \frac{2\eta_x \eta_y}{J} \frac{\partial}{\partial \eta} \left( -\overline{u'v'} h \right) \\
 &+ \eta_x (S_{\xi 1} + S_{\xi 2} + S_{\xi 3} + S_{\xi 4}) + \eta_y (S_{\eta 1} + S_{\eta 2} + S_{\eta 3} + S_{\eta 4}) \quad (5.39)
 \end{aligned}$$

ここに、 $S_{\xi 1}$  から  $S_{\eta 4}$  は2次流を考慮したことによる付加項であり、次式で定義される。

$$S_{\xi 1} = -c_{sn} \frac{\partial}{\partial \xi} \left[ \frac{1}{J} (\xi_x A_n U_s h \sin 2\varphi - \xi_y A_n U_s h \cos 2\varphi) \right]$$

$$S_{\xi 2} = -c_{sn} \frac{\partial}{\partial \eta} \left[ \frac{1}{J} (\eta_x A_n U_s h \sin 2\varphi - \eta_y A_n U_s h \cos 2\varphi) \right]$$

$$S_{\xi 3} = c_{n2} \frac{\partial}{\partial \xi} \left[ \frac{1}{J} (\xi_x A_n^2 h \sin^2 \varphi - \xi_y A_n^2 h \cos \varphi \sin \varphi) \right]$$

$$S_{\xi 4} = c_{n2} \frac{\partial}{\partial \eta} \left[ \frac{1}{J} (\eta_x A_n^2 h \sin^2 \varphi - \eta_y A_n^2 h \cos \varphi \sin \varphi) \right]$$

$$S_{\eta 1} = c_{sn} \frac{\partial}{\partial \xi} \left[ \frac{1}{J} (\xi_x A_n U_s h \cos 2\varphi + \xi_y A_n U_s h \sin 2\varphi) \right]$$

$$S_{\eta 2} = c_{sn} \frac{\partial}{\partial \eta} \left[ \frac{1}{J} (\eta_x A_n U_s h \cos 2\varphi + \eta_y A_n U_s h \sin 2\varphi) \right]$$

$$S_{\eta 3} = -c_{n2} \frac{\partial}{\partial \xi} \left[ \frac{1}{J} (\xi_x A_n^2 h \sin \varphi \cos \varphi - \xi_y A_n^2 h \cos^2 \varphi) \right]$$

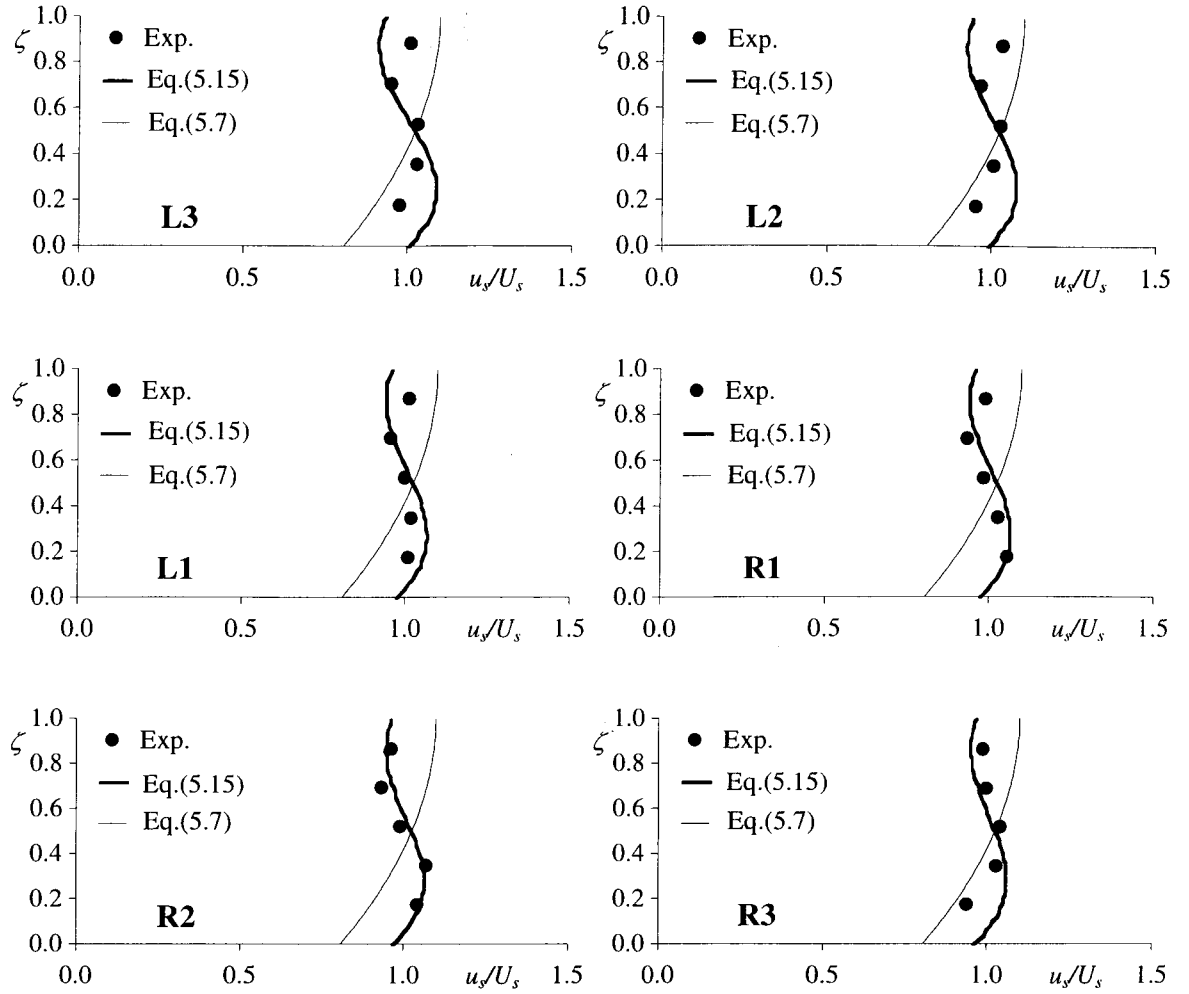


図-5.7 No. 2 断面における流速分布の比較

$$S_{\eta^4} = c_{n2} \frac{\partial}{\partial \eta} \left[ \frac{1}{J} \left( \eta_x A_n^2 h \cos \varphi \sin \varphi - \eta_y A_n^2 h \cos^2 \varphi \right) \right]$$

#### 5.4 結果と考察

No.2, No.1 断面における水位及び流速分布について実験結果と比較したものが図-5.5, 5.6である。図をみると、平面 2 次元モデルの計算結果は実験結果を再現していることがわかる。

図-5.7, 5.8 は、No.2, No.1 断面内の流速の鉛直分布について実験結果と本モデルを比較したものである。なお、本モデル中の  $r_s$  は 18 とした。本モデルと Engelund モデルにおける実験結果との適合性について着目すると、2 次流による主流方向流速の変化を考慮することで、主流流速分布が変形され、No.2 断面では実験結果とほぼ一致している。No.1 断面においても内岸側 (L1) を除いて Engelund モデルよりも実験結果に適合しているが、内岸側では、底面付近の流速が速くなる特徴が再現されているものの、適合性は十分ではない。その理由として、Engelund モデルを組み込んだ水深積分モデルから  $\delta$  の値を算出していること、主流に対する 2 次流の遅れを考慮していないことが考えられる。この点については、今後検討したい。本研究では、主流と 2 次流の干

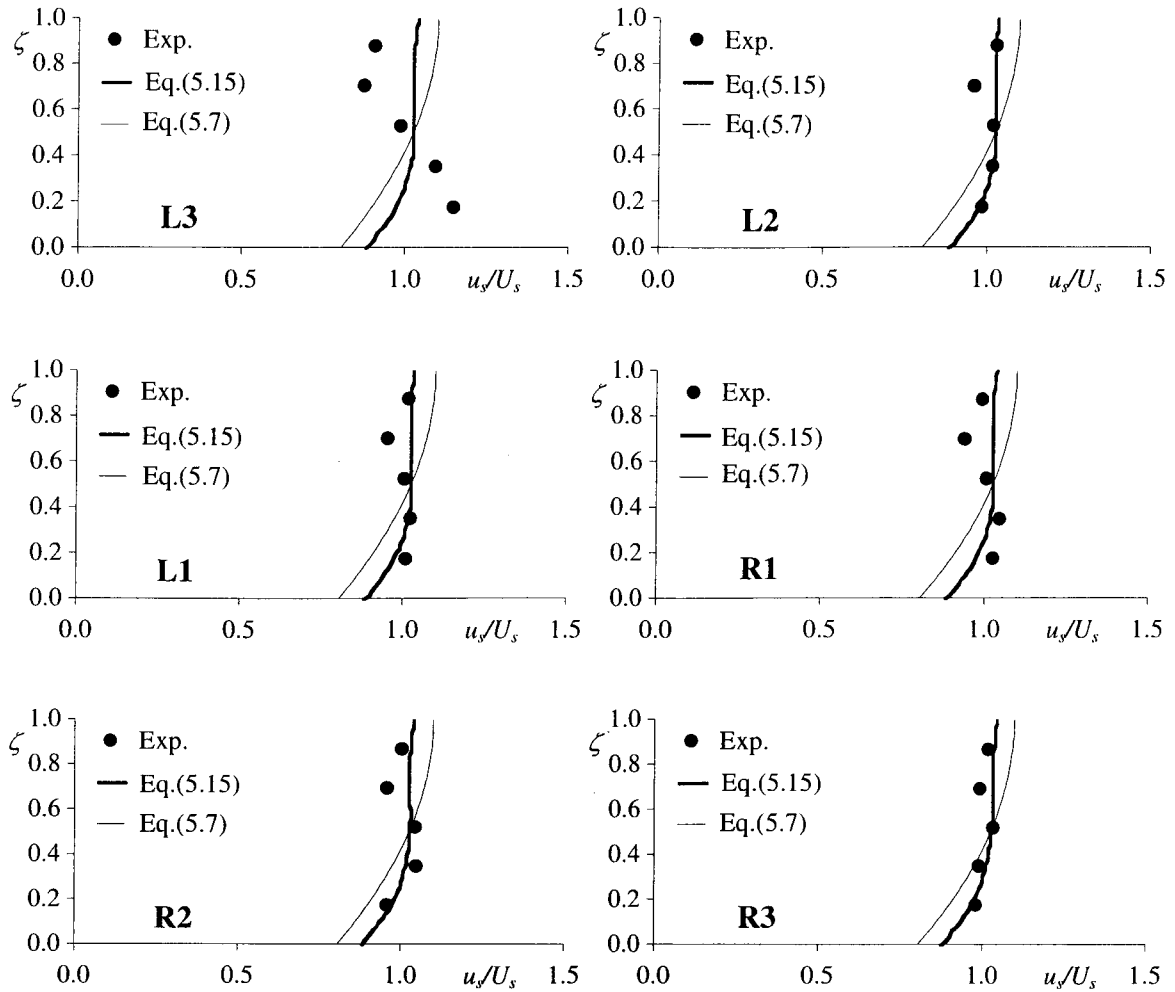


図-5.8 No. 1 断面における流速分布の比較

渉として移流項  $u_s u_n / r$  を加えることで、最大流速点が降下する特徴を再現した。しかし、石川・金によるモデルとは、抽出した主要項が異なっている。今後、後述の 3 次元計算結果を考察することで、どの項が主要項となるのか検討したい。

## 5.5 結語

本章では、河道湾曲部や蛇行部で生じる 2 次流の影響を水深積分モデルに組み込み、モデルの高精度化について検討した。得られた結論を以下にまとめる。

- (1) Blanckaert の指摘を踏まえ、2 次流のモデル化を物理的に考察した。Engelund モデルに移流項  $u_s u_n / r$  を加えることで、本モデルは流速分布の一樣化或いは最大流速点の dip を再現できた。また、運動量輸送係数についても Engelund モデルとの比較を行った。流速分布の一樣化によって 2 次流強度が弱まるため、Blanckaert が指摘しているように運動量輸送係数が Engelund モデルよりも小さく評価された。

- (2) 導かれたモデルを連続蛇行水路の実験に適用し、モデルの検証を行った。主流方向の流速分布形について比較を行い、実験結果とほぼ一致することを示した。
- (3) 今後、主流に対する 2 次流の遅れを考慮した場合について考察したい。

### 参考文献

- 1) Engelund, F.: Flow and bed topography in channel bends, *Proc. ASCE*, Vol.100, HY 11, pp.1631-1648, 1974.
- 2) 村本嘉雄, 井上喬之: 開水路湾曲流の内部機構, 京大防災研究所年報, 第 8 号, pp.415-428, 1965.
- 3) 池田駿介, 西村達也: 砂床蛇行河川の三次元流れと河床形状, 土木学会論文集, 第 369 号/II-5, pp.99-108, 1986.
- 4) Johannesson, H. and Parker, G.: Secondary flow in mildly sinuous channel, *J. Hydraulic Engrg.*, ASCE, Vol.115, No.3, pp.289-308, 1989.
- 5) 細田 尚, 長田信寿, 岩田通明: 一般座標系での主流と 2 次流の遅れを考慮した平面 2 次元モデル, 水工学論文集, 第 44 巻, pp.587-592, 1999.
- 6) Hosoda, T., Nagata, N., Kimura, I. and Michibata, K.: A depth averaged model of open channel flows with lag between main flows and secondary currents an a generalized curvilinear coordinate, *Advances in Fluid Modeling & Turbulence Measurements*, World Scientific, pp.63-70, 2002.
- 7) Rozovskii, I.L.: Flow of water in bends of open channels, Israel Program for Scientific Translations, Jerusalem, Israel, 1961.
- 8) Hicks, F.E., Jin, Y.C. and Steffler, P.M.: Flow near sloped bank in curved channel, *J. Hydraulic Engrg.*, ASCE, Vol.116, No.1, pp.55-70, 1990.
- 9) 石川忠晴, 金 舜範: 湾曲部の 2 次流に関する基礎的研究, 土木学会論文集, 第 375 号/II-6, pp.143-149, 1986.
- 10) Blanckaert, K.: Flow and turbulence in sharp open-channel bends, PhD-thesis, Ecole Polytechnique Federale de Lausanne.
- 11) 玉井信行, 池内幸司, 山崎晶: 連続わん曲水路における流れの実験的研究, 土木学会論文集, 第 331 号, pp.83-94.
- 12) 音田慎一郎, 細田 尚, 木村一郎: 一般座標系での主流の流速分布変化を考慮した湾曲流の水深積分モデルとその検証, 水工学論文集, 第 49 巻, (投稿中).
- 13) 財団法人国土技術研究センター: 固定床計算モデルの検証について (<http://ws3-er.eng.hokudai.ac.jp/yasu/hendou/index.htm>), 2004.



## 第6章 移動一般座標系による3次元数値解析

### 6.1 概説

本章では、移動一般座標系での3次元数値解析について検討する。その際、高レイノルズ数の複雑非定常乱流解析では、用いる乱流の構成則（乱流モデル）が問題となる。本解析では、現象の再現性、実用性の観点から2-方程式モデルの高レイノルズ数型2次非線形  $k-\varepsilon$  モデルを適用する。この数値解析モデルは、水制周辺の流れに適用され、実験結果と比較することでモデルの検証が行われている<sup>1,2)</sup>。この3次元計算結果を水深積分モデルの高精度化のための理論構築やモデル開発に用いるべく、解析結果の分析を行う。

### 6.2 数値解析法の概要

#### 6.2.1 基礎式

移動一般座標系における反変成分表示の基礎式は下記のようなになる<sup>3,4,5)</sup>。以下、添字は総和則に従う。

[連続式]

$$\frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial V^\alpha \sqrt{g}}{\partial \xi^\alpha} = 0 \quad (6.1)$$

[運動方程式]

$$\frac{\partial V^i}{\partial t} + \nabla_j [V^i (V^j - W^j)] + V^i \nabla_j W^j + V^j \nabla_j W^i$$

$$= F^i - \frac{1}{\rho} g^{ij} \nabla_j p + \nabla_j \left[ -\overline{v^i v^j} \right] + 2\nu \nabla_j e^{ij} \quad (6.2)$$

[ $k$  方程式]

$$\frac{\partial k}{\partial t} + \nabla_j [k(V^j - W^j)] + k \nabla_j W^j = -g_{ij} \overline{v^i v^j} \nabla_j V^i - \varepsilon + \nabla_j \left\{ \left( \frac{D_t}{\sigma_k} + \nu \right) g^{ij} \nabla_i k \right\} \quad (6.3)$$

[ $\varepsilon$  方程式]

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + \nabla_j [\varepsilon(V^j - W^j)] + \varepsilon \nabla_j W^j = \\ -C_{\varepsilon 1} \frac{\varepsilon}{k} g_{ij} \overline{v^i v^j} \nabla_j V^i - C_{\varepsilon 2} \frac{\varepsilon^2}{k} + \nabla_j \left\{ \left( \frac{D_t}{\sigma_k} + \nu \right) g^{ij} \nabla_i \varepsilon \right\} \end{aligned} \quad (6.4)$$

ここに、 $\xi^j$ ；計算空間の空間座標、 $t$ ；時間、 $V^j$ ；流速ベクトルの反変成分、 $W^j$ ；格子移動速度ベクトルの反変成分、 $v^j$ ；乱れ速度ベクトルの反変成分、 $p$ ；圧力、 $\nu$ ；動粘性係数、 $\rho$ ；流体の密度、 $k$ ；乱れエネルギー、 $\varepsilon$ ；乱れエネルギー散逸率、 $F^i$ ；重力ベクトルの反変成分をそれぞれ表わす。 $g_{ij}$ 、 $g^{ij}$ ；計量テンソルの共変成分及び反変成分であり、次のような関係である。

$$g_{ij} = \frac{\partial x^k}{\partial \xi^i} \frac{\partial x^l}{\partial \xi^j} \delta_{kl}, \quad g^{ij} = \frac{\partial \xi^k}{\partial x^i} \frac{\partial \xi^l}{\partial x^j} \delta_{kl}, \quad g_{ij} g^{jk} = \delta_i^k \quad (6.5)$$

ここに、 $x^i$ はデカルト座標系を表す。

また、 $g$ は計量テンソルの共変成分からなる行列の行列式であり式(6.6)で表される。

$$g = \det[g_{ij}] \quad (6.6)$$

さらに、 $\nabla_j$ は共変微分を表し、例えば、ベクトルの反変成分 $A^k$ に関しては次ようになる。

$$\nabla_i A^k = \frac{\partial A^k}{\partial \xi^i} + A^j \Gamma_{ij}^k \quad (6.7)$$

ここに、 $\Gamma_{ij}^k$ はクリストッフエルの記号（接続の係数）であり、次式で計算される。

$$\Gamma_{ij}^k = \left\{ \begin{matrix} k \\ i j \end{matrix} \right\} = \frac{1}{2} g^{km} \left( \frac{\partial g_{jm}}{\partial \xi^i} + \frac{\partial g_{im}}{\partial \xi^j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial \xi^m} \right) = \frac{\partial \xi^k}{\partial x^p} \frac{\partial^2 x^p}{\partial \xi^i \partial \xi^j} \quad (6.8)$$

なお、流速ベクトルの反変成分( $V^i$ )と直交成分( $U^i$ )は次の関係（chain rule）により変換される。

$$V^i = \frac{\partial \xi^i}{\partial x^j} U^j, \quad U^i = \frac{\partial x^i}{\partial \xi^j} V^j \quad (6.9)$$

## 6.2.2 乱流モデル

乱流モデルには、二次流の再現性、壁面が粗面である点を考慮して、細田・木村が開発を行ってきた高レイノルズ数型二次非線形  $k$ - $\varepsilon$  モデルを用いる。本モデルは角柱<sup>6)</sup>や立方体周辺の流れ<sup>7)</sup>、複断面開水路流れ<sup>8)</sup>などへの適用性が検証されている。非線形  $k$ - $\varepsilon$  モデルの一般曲線座標系における構成則を次に示す<sup>9)</sup>。

$$-\overline{v^i v^j} = D_t S^{ij} - \frac{2}{3} k \delta_s^i g^{sj} - \frac{k}{\varepsilon} D_t [\alpha_1 Q_1 + \alpha_2 Q_2 + \alpha_3 Q_3] \quad (6.10)$$

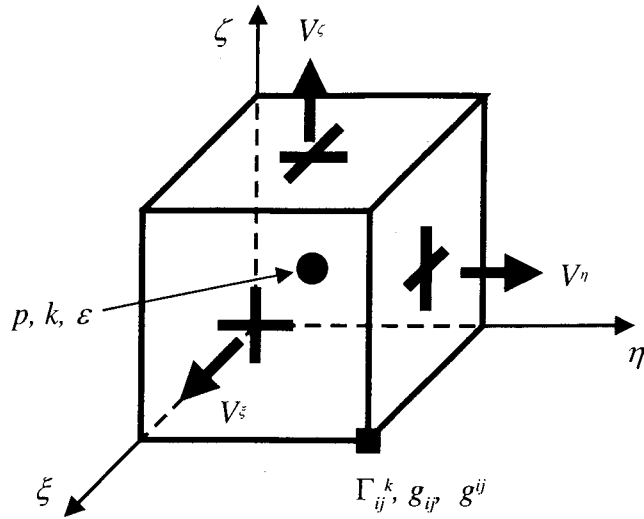


図-6.1 完全スタガード系における変数配置

$$D_t = C_\mu \frac{k^2}{\varepsilon} \quad (6.11)$$

$$Q_1 = S^{i\alpha} g_{\alpha l} \Omega^{lj} + S^{j\beta} g_{\beta l} \Omega^{li} \quad (6.12)$$

$$Q_2 = S^{i\alpha} g_{\alpha l} S^{lj} - \frac{1}{3} S^{k\alpha} g_{\alpha m} S^{m\beta} g_{\beta k} \delta_l^i g^{lj} \quad (6.13)$$

$$Q_3 = \Omega^{i\alpha} g_{\alpha l} \Omega^{lj} - \frac{1}{3} \Omega^{k\alpha} g_{\alpha m} \Omega^{m\beta} g_{\beta k} \delta_l^i g^{lj} \quad (6.14)$$

$$S^{ij} = g^{j\alpha} \nabla_\alpha V^i + g^{i\alpha} \nabla_\alpha V^j \quad (6.15)$$

$$\Omega^{ij} = g^{j\alpha} \nabla_\alpha V^i - g^{i\alpha} \nabla_\alpha V^j \quad (6.16)$$

モデル係数は、ストレインパラメータ  $S$  と、ローテーションパラメータ  $\Omega$  の次のような関数で与える。

$$\alpha_1 = -0.1325 f_M, \quad \alpha_2 = 0.0675 f_M, \quad \alpha_3 = -0.0675 f_M \quad (6.17)$$

$$f_M = \frac{1}{1 + 0.02 M^2}, \quad M = \max[S, \Omega] \quad (6.18)$$

$$C_\mu = \min \left[ 0.09, \frac{0.3}{1 + 0.09 M^2} \right] \quad (6.19)$$

$$S = \frac{k}{\varepsilon} \sqrt{\frac{1}{2} S^{i\alpha} g_{\alpha j} S^{j\beta} g_{\beta i}}, \quad \Omega = \frac{k}{\varepsilon} \sqrt{\frac{1}{2} \Omega^{i\alpha} g_{\alpha j} \Omega^{j\beta} g_{\beta i}} \quad (6.20)$$

モデル係数のうち式(6.17), (6.18)は単純せん断流場における乱れ強さの配分に関する実験結果との比較を通じて同定された<sup>7)</sup>。式(6.19)については、二次元及び三次元流れにおける実現条件を満たすように関数形を同定した<sup>10)</sup>。

### 6.2.3 計算法の概要

#### (1) 計算スキーム

計算法は有限体積法とする。一般曲線座標系においては、計算の単純化と計算機記憶容量の節約のため、レギュラー格子あるいはコロケート格子が採用されることが多いが、本章では計算の安定性と有限体積法への親和性を考慮して、圧力、 $k$  及び  $\varepsilon$  を直方体格子の中央で、流速ベクトルの成分を側面で定義する完全スタガード格子系を用いる。計算格子上的水理量の配置を図-6.1 に示す。計量テンソル、クリストッフェル記号等は格子点上で定義し、計算の過程で必要となる位置の値については、その都度内挿により求めた。これは、計算機メモリの節約のためである。

運動方程式の移流項の離散化には QUICK スキームを、 $k$  および  $\varepsilon$  方程式の移流項には Hybrid 法を用いている。また、運動方程式の移流項に関するクリストッフェル記号を含む付加項についても、コントロールボリュームの上流側で評価した。時間積分は完全陽解法とする。圧力は時間ステップ毎に SOLA アルゴリズム<sup>11)</sup>と同様の収束計算により求める。

## (2) 壁面及び水面の取り扱い

今回の数値計算の対象が河川流であることを考慮し、壁面の  $k$  と  $\varepsilon$  については壁関数法で与え、壁面近傍の流速は対数則で評価することとした。

水面の  $\varepsilon$  は杉山ら<sup>12)</sup>の提案する次式で評価した。

$$\varepsilon_s = \frac{C_{\mu 0}^{3/4} k_s^{3/2}}{0.4 \Delta z_s}, \quad (C_{\mu 0} = 0.09) \quad (6.21)$$

上式中、添字  $s$  は表層の値を、 $\Delta z_s$  は水面から定義点までの距離を表す。水面の  $k$  には slip 条件を課す。また、水面近傍の鉛直方向の乱れの減衰を考慮するため、次の減衰関数を渦動粘性係数に乘じる<sup>13)</sup>。

$$f_s = 1 - \exp\left\{-B(h-z)\varepsilon_s/k_s^{3/2}\right\}, \quad (B=10) \quad (6.22)$$

自由水面変動量は、反変成分表示の基礎式においては次のように極めて簡単な式により計算される<sup>3,5)</sup>。

$$\Delta h = \sqrt{g_{33}} V^3 \Delta t \quad (6.23)$$

上式で、 $\Delta t$  : 計算時間間隔、 $\Delta h$  :  $\Delta t$  時間の水面変動量を表し、添字 3 は鉛直方向を表わすものとする。

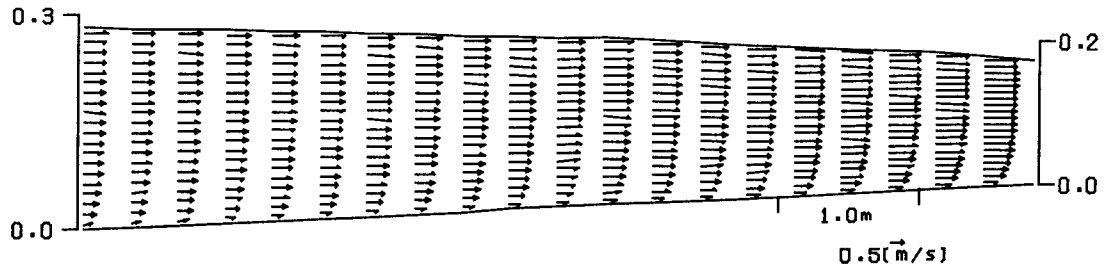
## 6.3 モデルの適用

### 6.3.1 加速・減速流

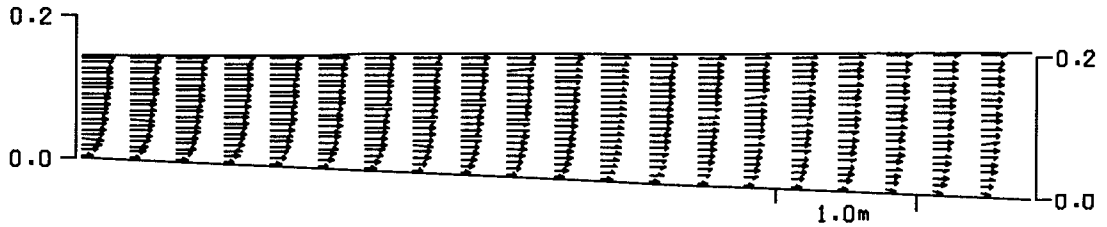
第4章で検討した Song & Graf の加速・減速流の実験に適用する。

#### (1) 計算条件

長さ 16.8m、幅 0.6m の水路を考え、表-4.1 のケース AS93-Q100、DS90-Q70 について検討する。計算格子は、流れ方向に 50 メッシュ、横断方向に 20 メッシュ、鉛直方向に 20 メッシュとした。また、数値計算は 3 次元計算と鉛直 2 次元計算の両方について検討した。

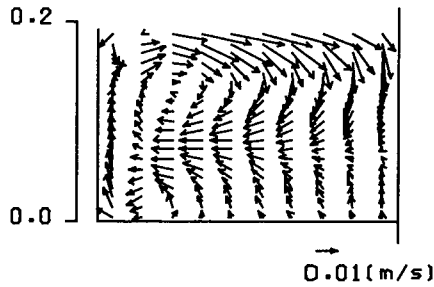


(a) AS93-Q100

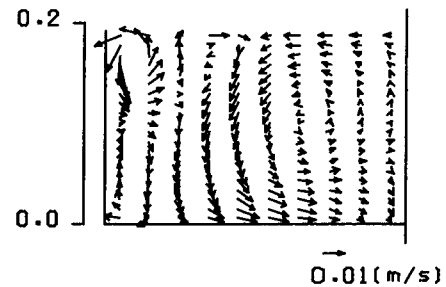


(b) DS90-Q70

図-6.2 鉛直縦断面内の流れ方向流速ベクトル

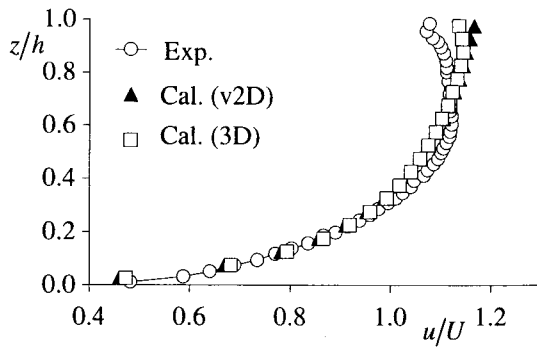


(a) AS93-Q100

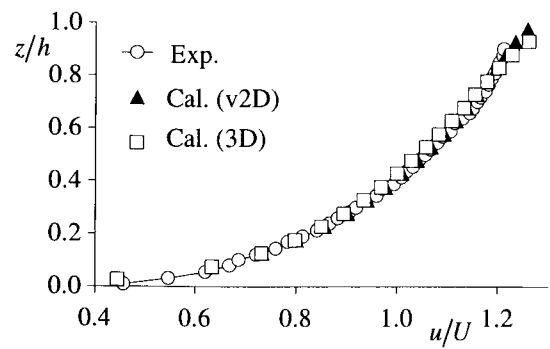


(b) DS90-Q70

図-6.3 鉛直横断面内の2次流ベクトル



(a) AS93-Q100



(b) DS90-Q70

図-6.4 流速分布の比較

## (2) 計算結果の考察

図-6.2 は、鉛直縦断面内の流れ方向ベクトル (3D) を示したものであり、流れの加速・減速が確認される。また、図-6.3 は、上流から 14.1m の位置での 2 次流ベクトルを示したものである。

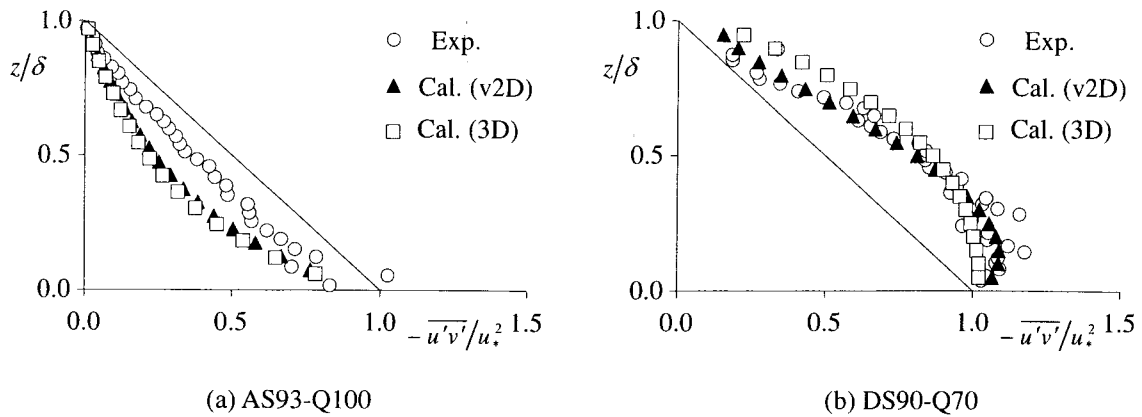


図-6.5 レイノルズ分布の比較

図をみると加速流（AS93-Q100）では、断面内中央において下方へ落ち込む流れが見られるが、減速流（DS90-Q70）では、底面から水面への流れが見られ、加速流と反対向きの2次流が生じている。

次に、計算結果と実験結果の比較を試みる。図-6.4は、上流から14.1mの位置での流速分布について実験結果と計算結果の比較を表したものである。図には併せて鉛直2次元計算結果も示した。図をみると、加速流の場合では、3次元解析を行うことで最大流速点のdipが再現されており、実験結果とほぼ適合している。一方、減速流のケースでは、鉛直2次元計算、3次元計算とも実験結果と一致している。図-6.5は、レイノルズ応力分布の比較を示したものである。加速流、減速流の場合には三角形分布よりそれぞれ減少、増大する特徴が再現されており、実験結果とほぼ適合していることがわかる。

### 6.3.2 連続蛇行水路

第5章で検討した連続蛇行水路での実験に適用する。

#### (1) 計算条件

水路模型の諸元を図-6.6に示す。計測区間は図-6.6(a)のNo.8からNo.0断面であり、水位及び流速はそれぞれポイントゲージ、電磁流速計で測定されている。流速測定点は図-6.6(b), (c)のとおりであり、(b), (c)はそれぞれ単断面、複断面でのケースを示している。計算条件を表-6.1に再記する。計算格子は、単断面水路では流れ方向に71メッシュ、横断方向に20メッシュ、鉛直方向に14メッシュとし、複断面水路では流れ方向に71メッシュ、横断方向に30メッシュ、鉛直方向に9メッシュとした。

#### (2) 計算結果の考察

まず、単断面水路での計算結果について考察する。図-6.7は、水平面内の流速ベクトルを示したものであり、図-6.8は、鉛直横断面内の主流方向流速ベクトルを示したものである。図をみると、最大流速点のdipが生じている地点が数多く見られる。図-6.9は、横断面内の2次流ベクトル

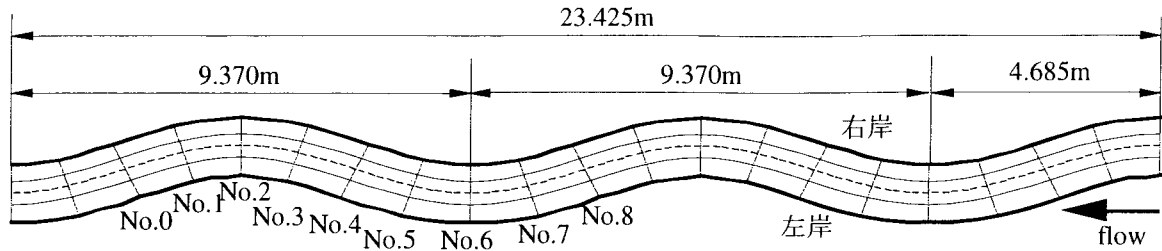


図-6.6(a) 実験水路の概要

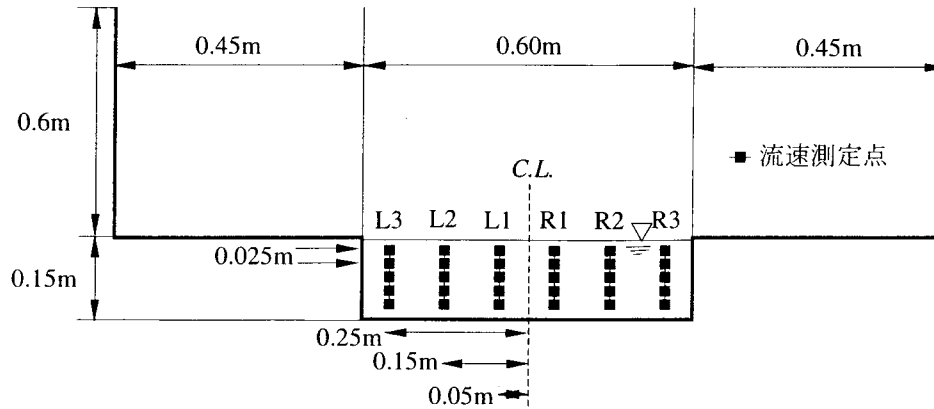


図-6.6(b) 単断面水路の断面図

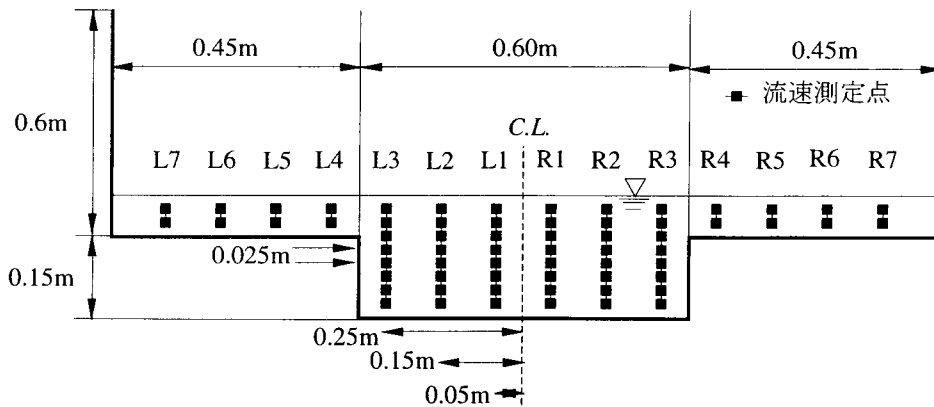


図-6.6(c) 複断面水路の断面図

表-6.1 実験の水理量

	$Q$	$h$	$U_m$	$\sin \theta$
	( $\text{m}^3/\text{s}$ )	(m)	(m/s)	
単断面水路	0.04	0.143	0.47	1/2000
複断面水路	0.10	0.225	0.49	1/2000

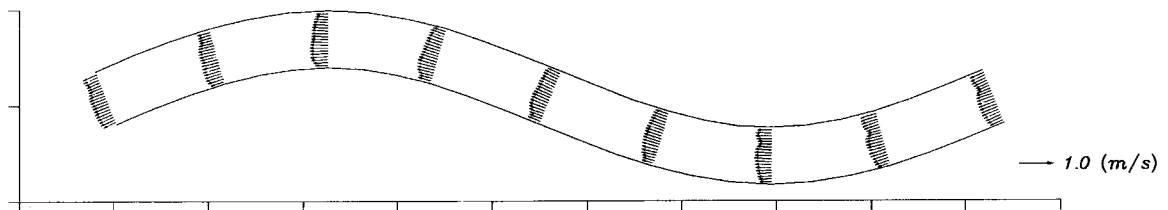
ここに、 $Q$ : 流量,  $h$ : 水深,  $U_m$ : 平均流速,  $\sin \theta$ : 水路勾配

ルを表したものである。図の左側が左岸、右側が右岸である。湾曲に伴う 2 次流が No.8 から No.6 断面の外岸側（左岸）で発達し、その後、内岸側（右岸）の 2 次流が発達する様子が確認される。

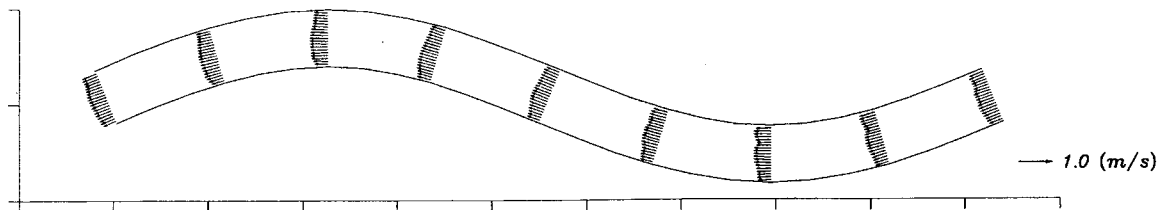
3 次元計算結果を水深方向に積分し、No.2, No.1 断面の水位、水深平均流速について実験結果

と比較したものが図-6.10, 11 であり, 計算結果は実験結果とほぼ一致している. また, No.2, No.1 断面において主流方向流速分布の比較を示したものが図-6.12, 13 である. 図をみると, 最大流速点の dip が再現されており, 実験結果とほぼ適合していることがわかる.

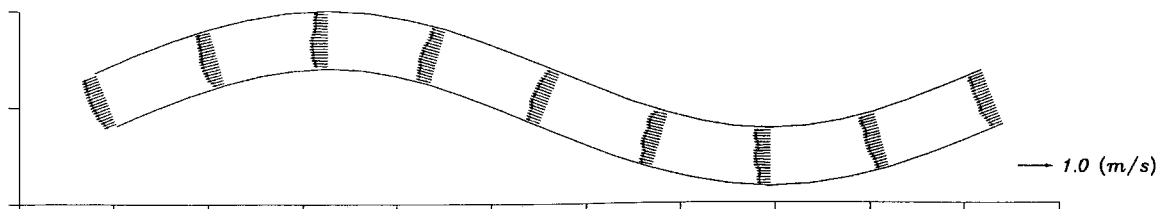
次に, 複断面水路での計算結果について考察する. 図-6.14 は, 水平面内の流速ベクトルを示したものであり, 図-6.15 は, 鉛直横断面内の主流方向流速ベクトルを示したものである. 複断面の場合も単断面水路の結果と同様に, 最大流速点の降下が見られる. 図-6.16 は, 横断面内の2次流ベクトルを示したものである. 水路の曲がりに伴って, 2次流が発達していることがわかる. また, 図-6.17, 18 は, 水位と水深平均流速の横断分布について比較したものである. 水位についてはほぼ適合しているが, 流速については外岸側において実験結果よりも速くなっている. これは, 横断方向及び鉛直方向の格子数が十分足りなかったからではないかと考えられる. さらに, No.2, No.1 断面の主流方向流速分布の比較を示したものが図-6.19, 20 である. ここで, 実験では, 高水敷の流速データが2点しか測定されていないため, 低水路内の流速分布の比較を検討する. 図をみると, 計算結果は実験結果とほぼ一致しているが, 両断面とも L1, R1, R2 地点の底面付近で適合性が十分ではない. その理由として, 鉛直方向, 横断方向の格子数が足りず, 2次流による主流方向流速の変形が計算できなかったからではないかと考えられる.



(a) 水路床から 2.5mm



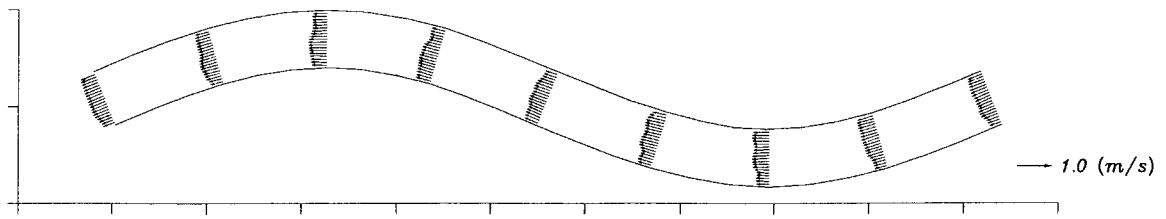
(b) 水路床から 5.0mm



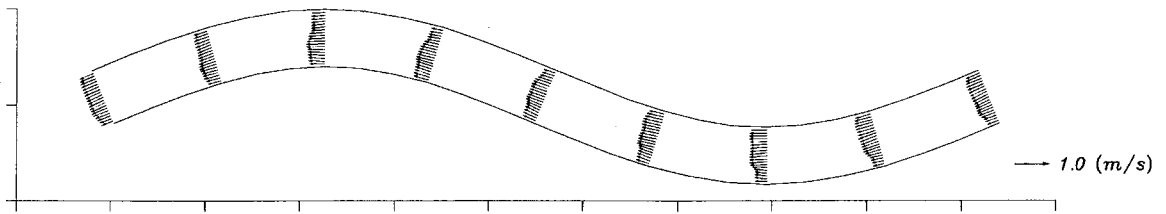
(c) 水路床から 7.5mm

図-6.7(1) 単断面水路での水平面内流速ベクトル



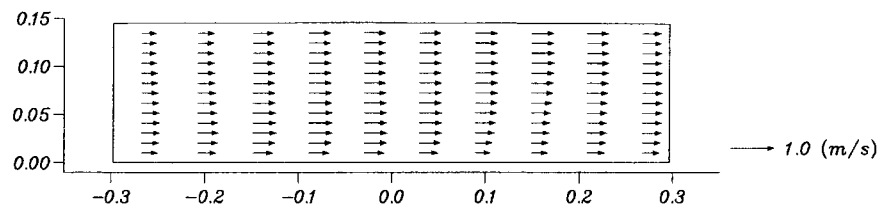


(d) 水路床から 10.0mm

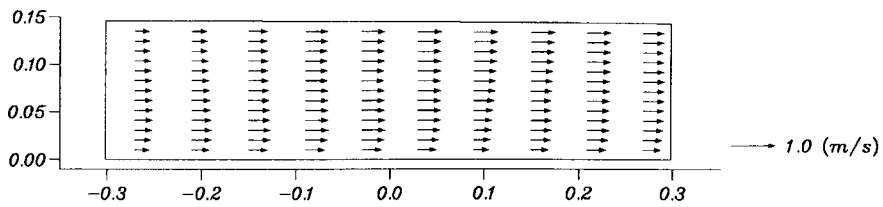


(e) 水路床から 12.5mm

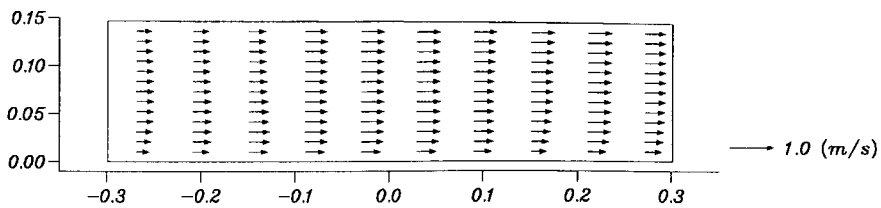
図-6.7(2) 単断面水路での水平面内流速ベクトル



(a) No.8

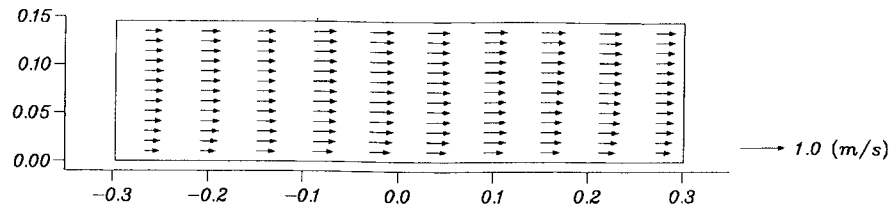


(b) No.7

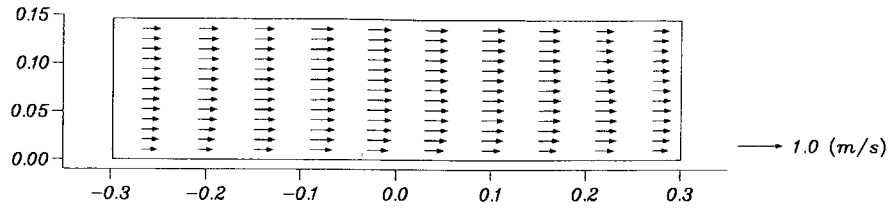


(c) No.6

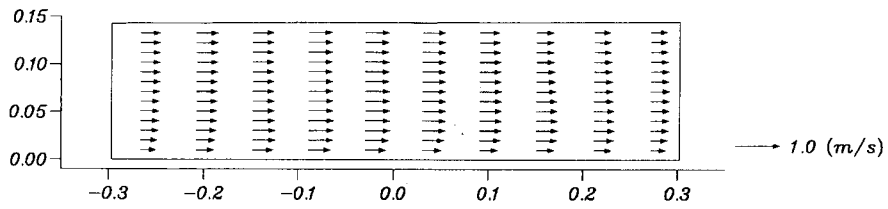
図-6.8(1) 単断面水路での鉛直面内主流方向流速ベクトル



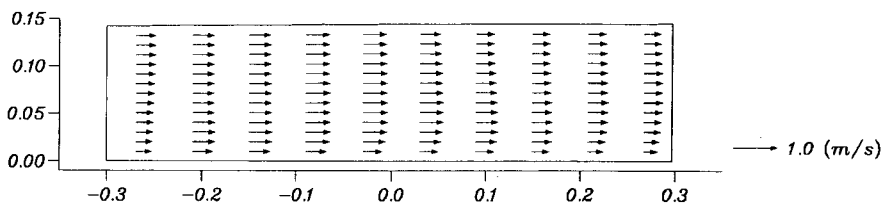
(d) No.5



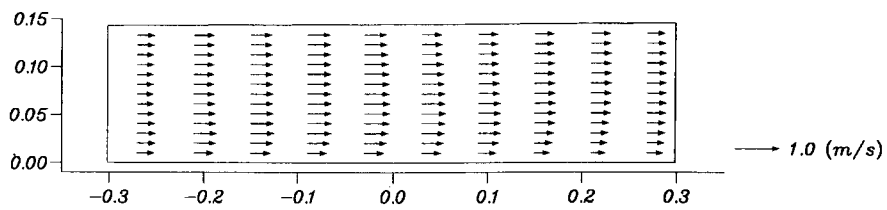
(e) No.4



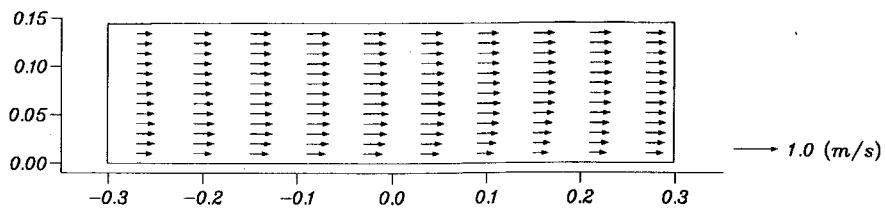
(f) No.3



(g) No.2

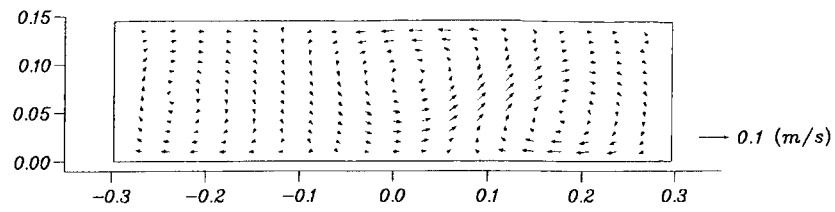


(h) No.1

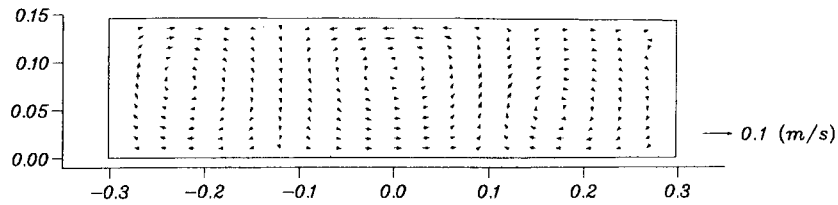


(i) No.0

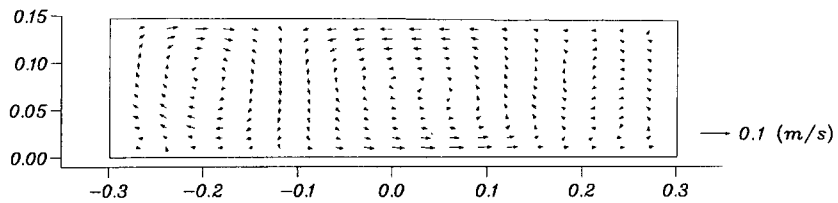
図-6.8(2) 単断面水路での鉛直面内主流方向流速ベクトル



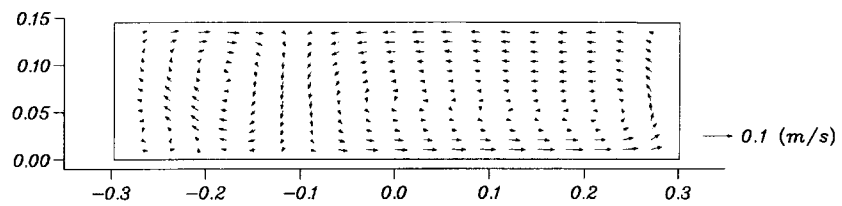
(a) No.8



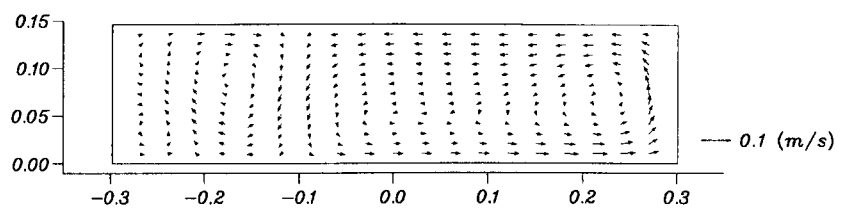
(b) No.7



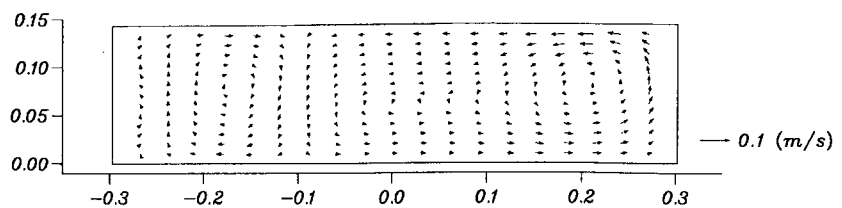
(c) No.6



(d) No.5

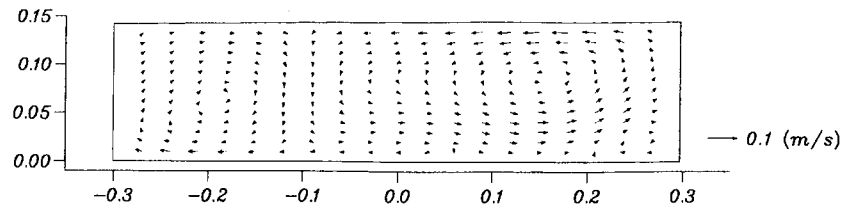


(e) No.4

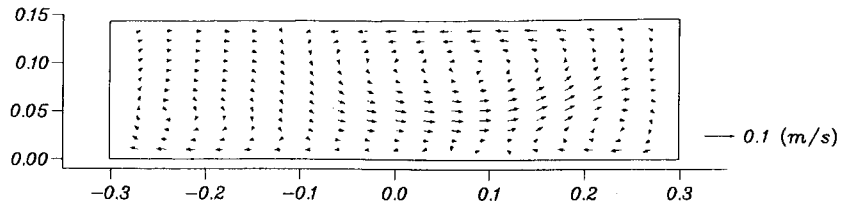


(f) No.3

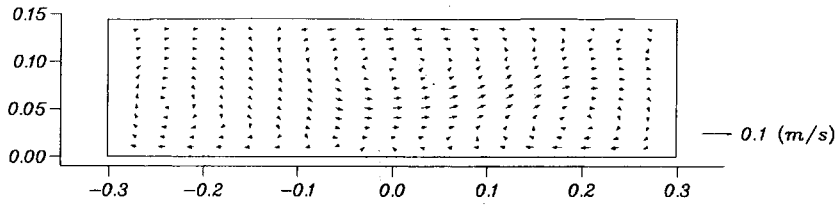
図-6.9(1) 単断面水路での横断面内2次流ベクトル



(g) No.2



(h) No.1



(i) No.0

図-6.9(2) 単断面水路での横断面内2次流ベクトル

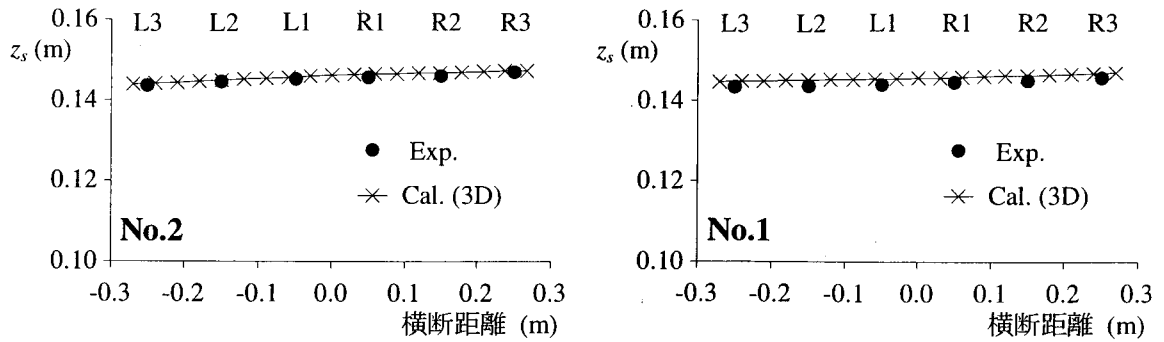


図-6.10 水位の横断分布の比較

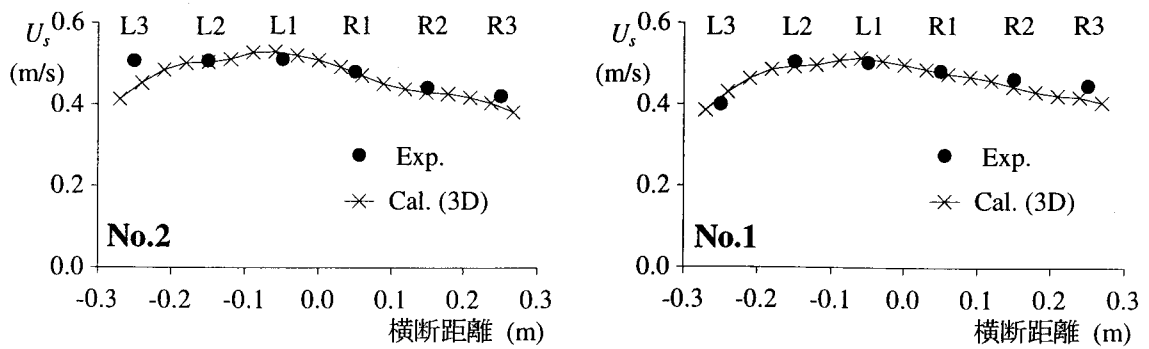


図-6.11 流速の横断分布の比較

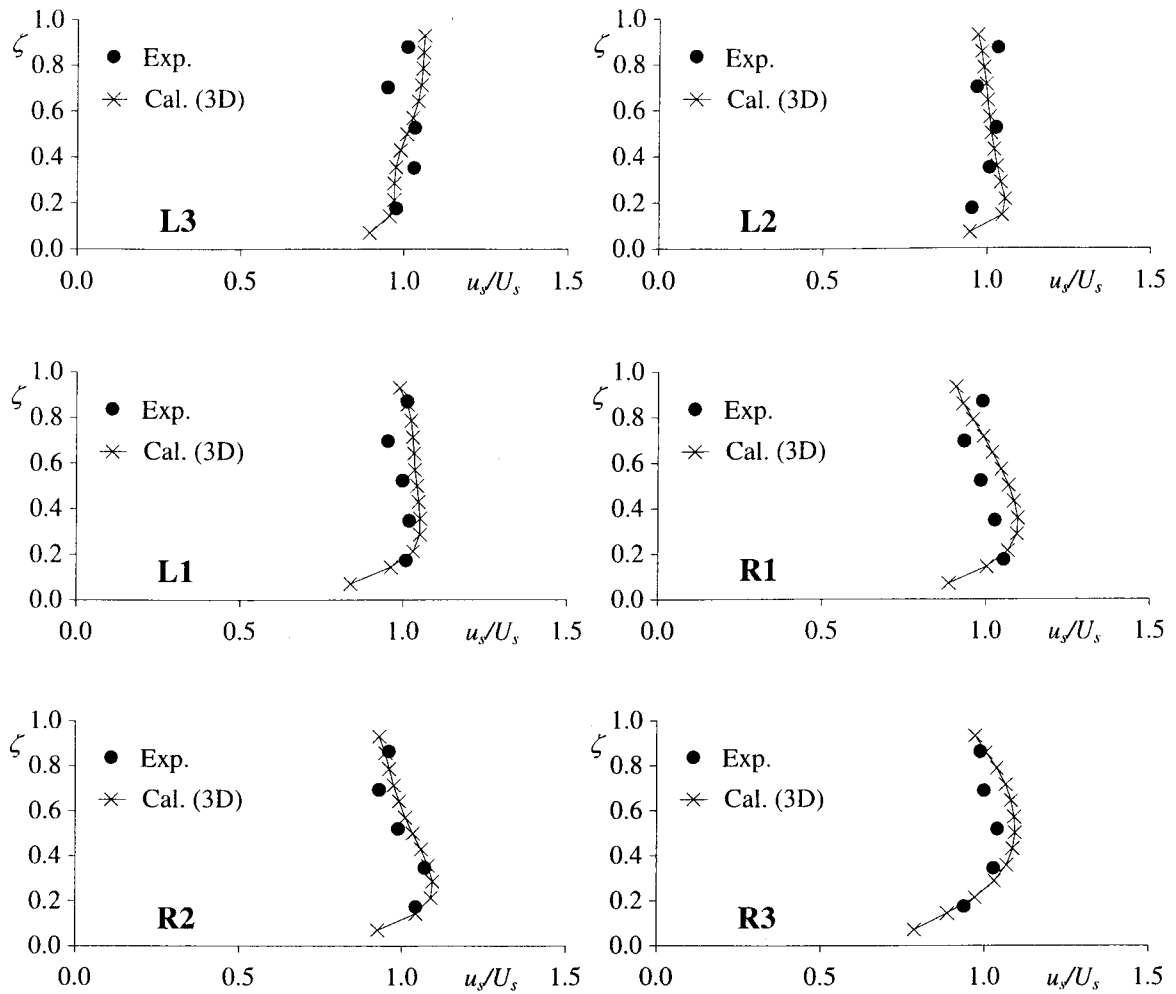


図-6.12 No. 2 断面における流速分布の比較

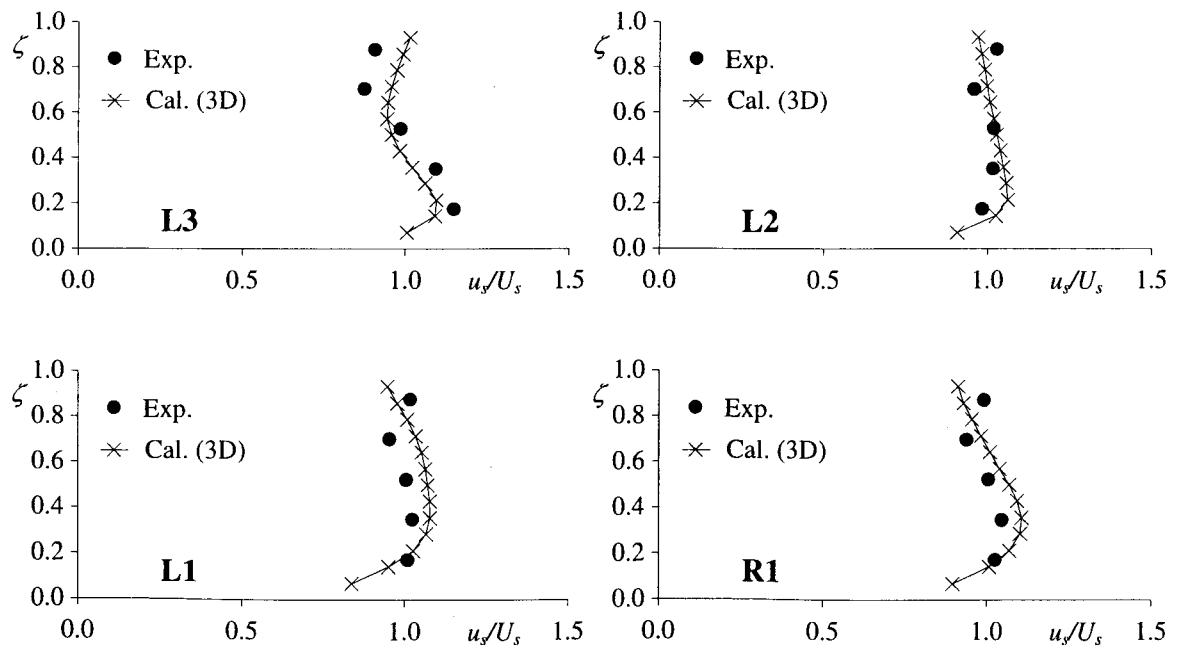


図-6.13(1) No. 1 断面における流速分布の比較

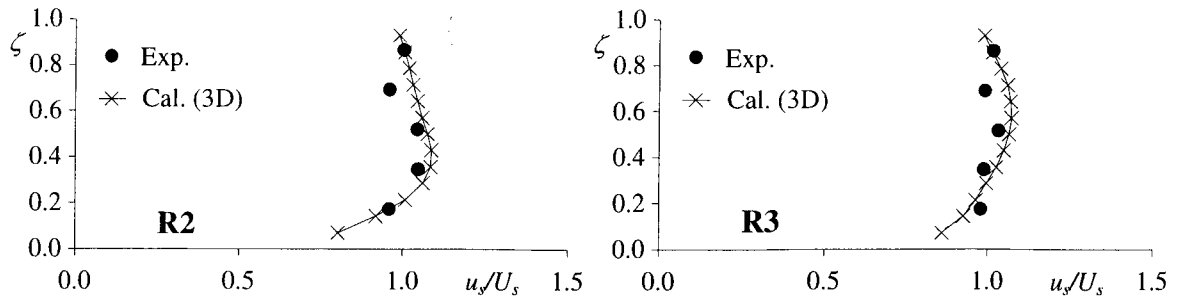
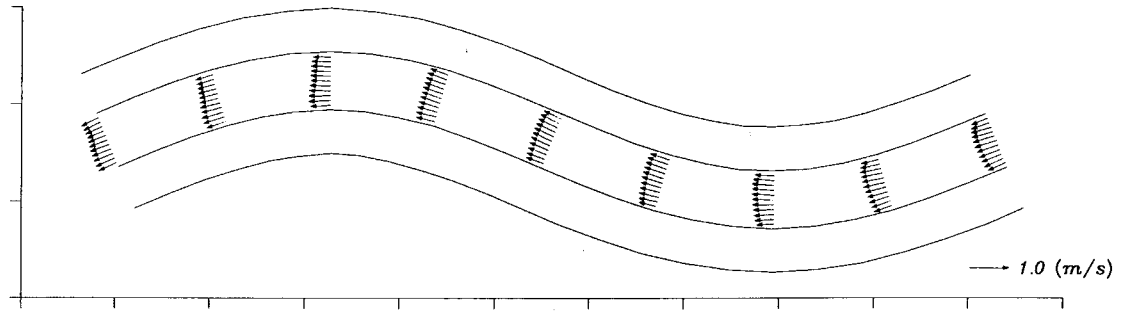
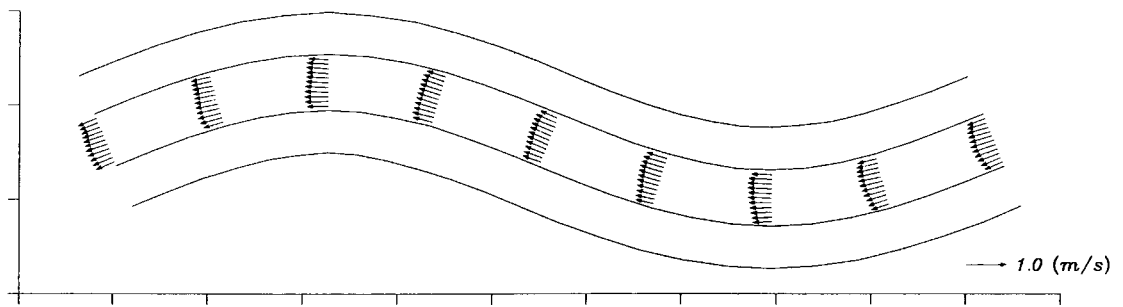


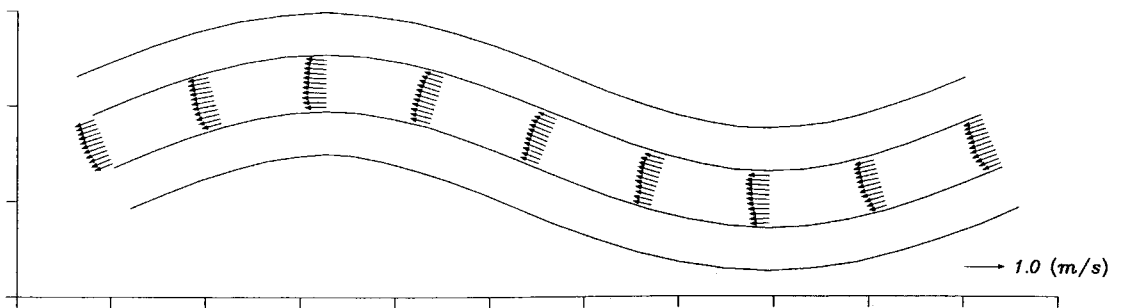
図-6.13(2) No. 1断面における流速分布の比較



(a) 水路床から 2.5mm

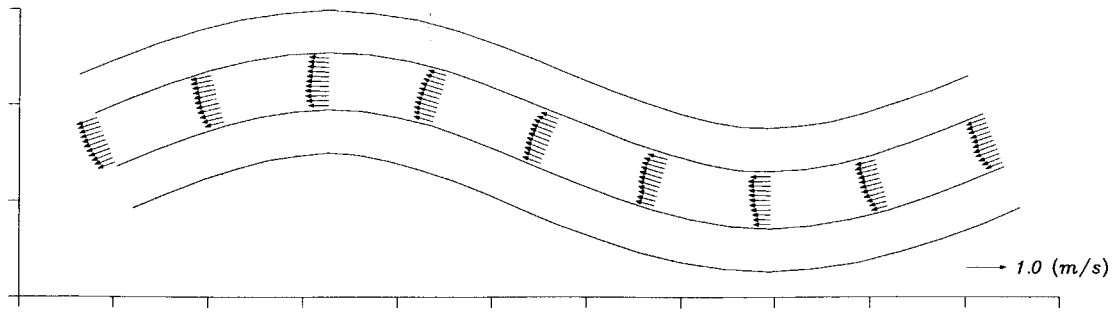


(b) 水路床から 5.0mm

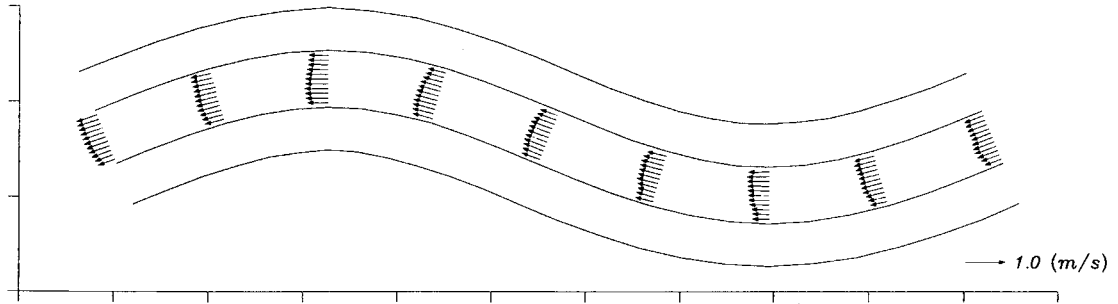


(c) 水路床から 7.5mm

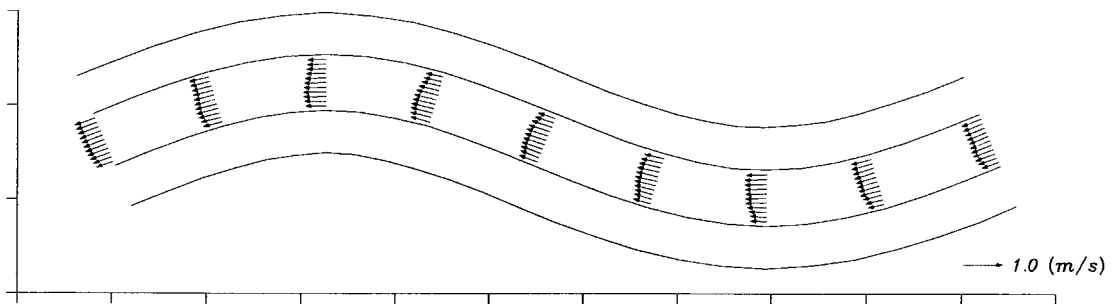
図-6.14(1) 複断面水路での水平面内流速ベクトル



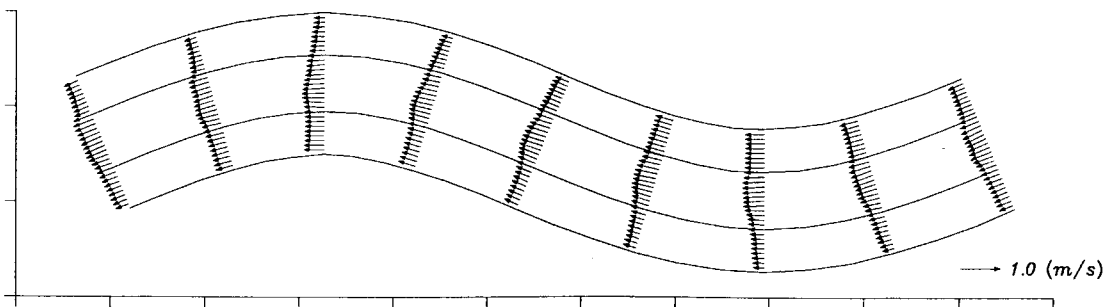
(d) 水路床から 10.0mm



(e) 水路床から 12.5mm

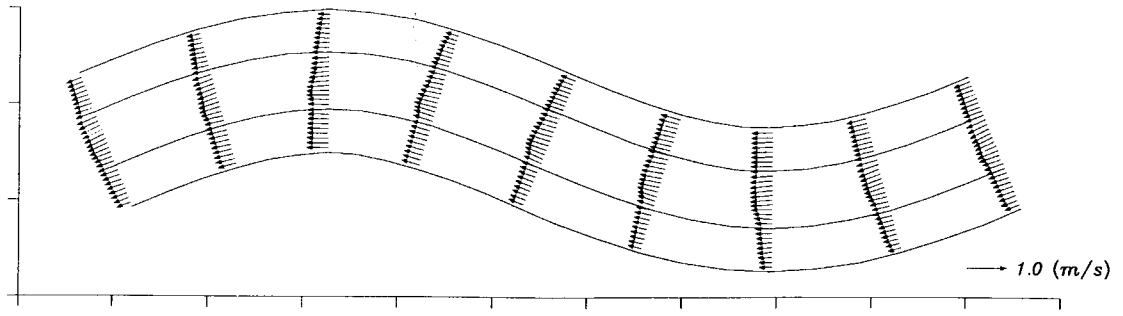


(f) 水路床から 15.0mm



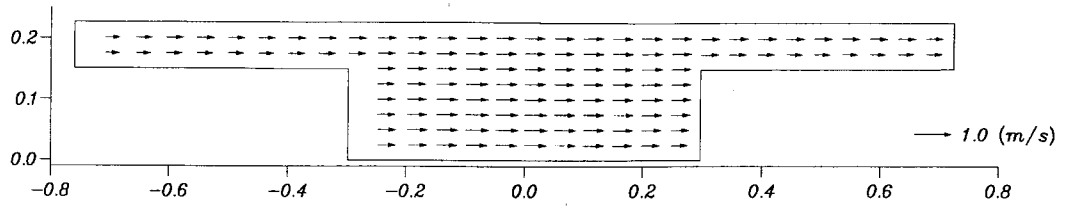
(g) 水路床から 17.5mm

図-6.14(2) 複断面水路での水平面内流速ベクトル

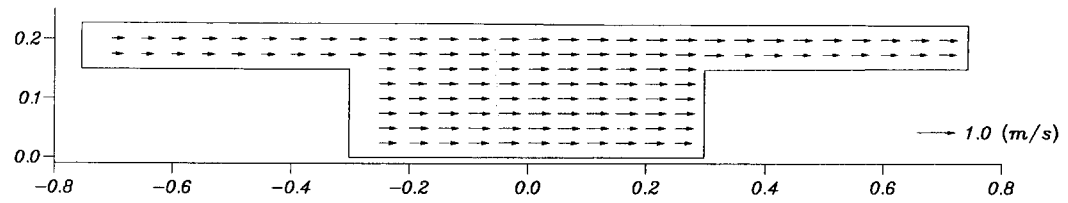


(h) 水路床から 20.0mm

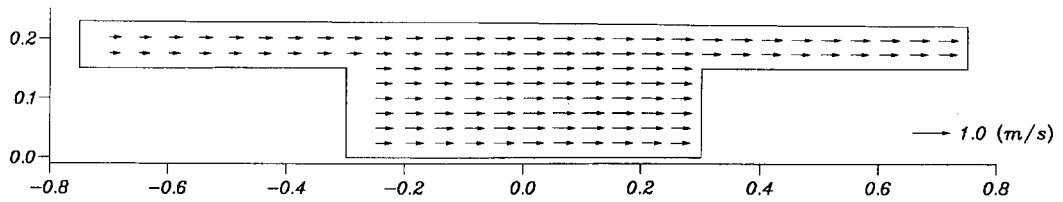
図-6.14(3) 複断面水路での水平面内流速ベクトル



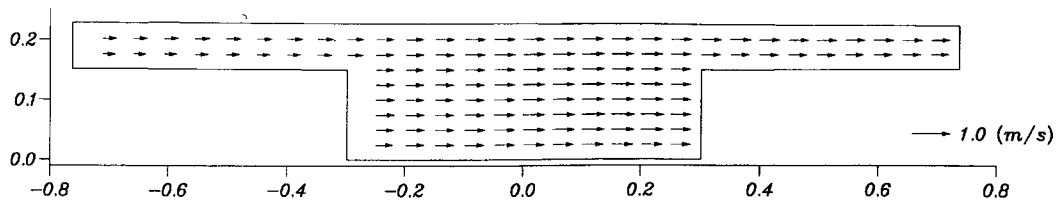
(a) No.8



(b) No.7



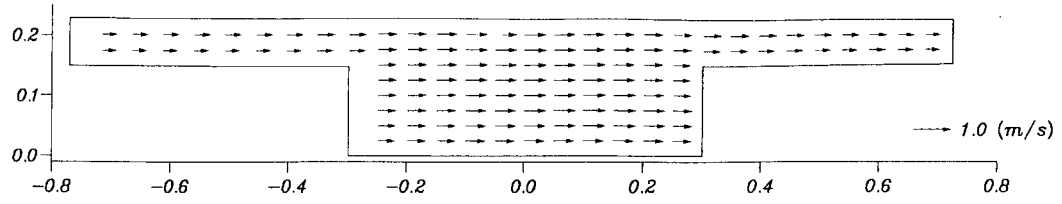
(c) No.6



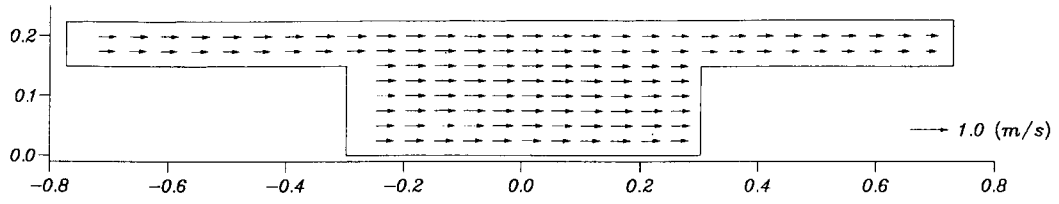
(d) No.5

図-6.15(1) 複断面水路での鉛直面内主流方向流速ベクトル

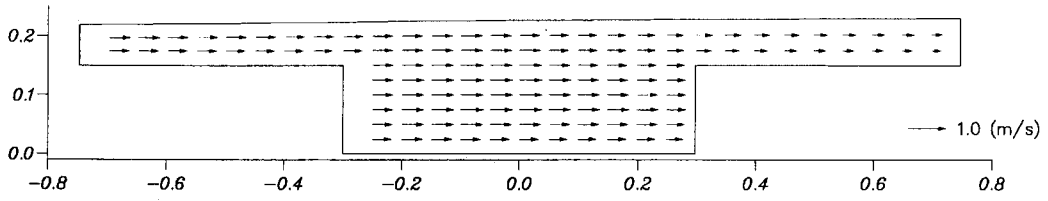




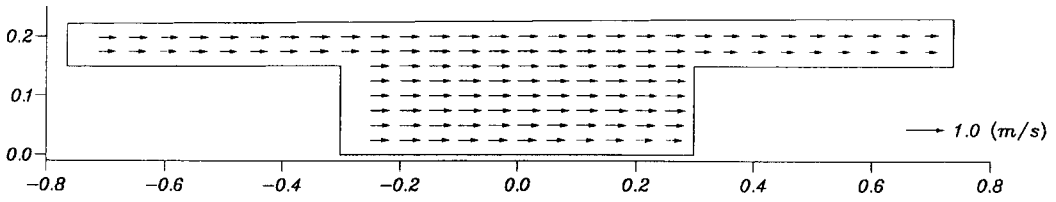
(e) No.4



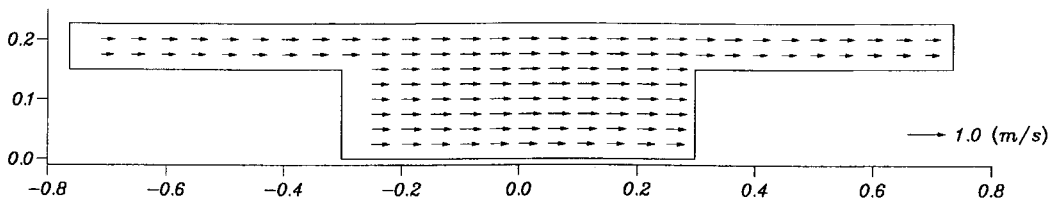
(f) No.3



(g) No.2

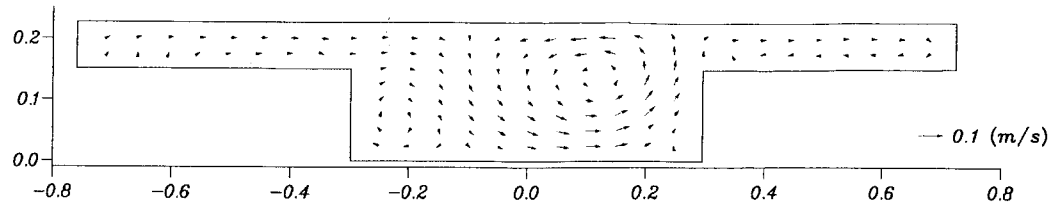


(h) No.1

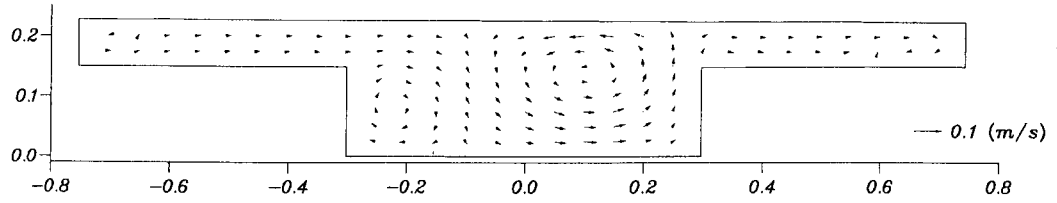


(i) No.0

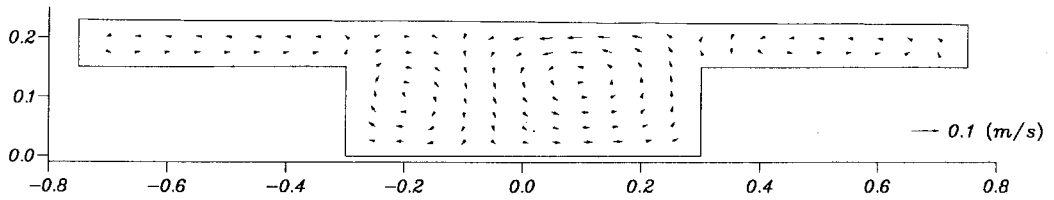
図-6.15(2) 複断面水路での鉛直面内主流方向流速ベクトル



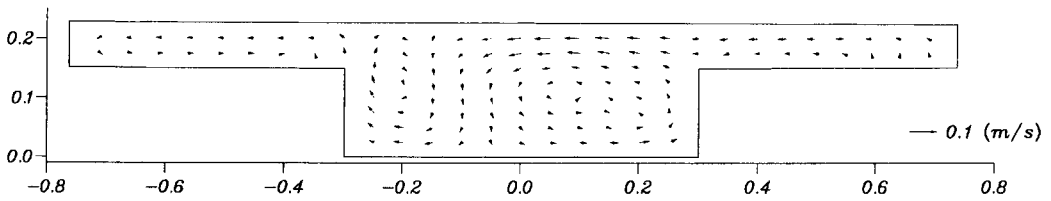
(a) No.8



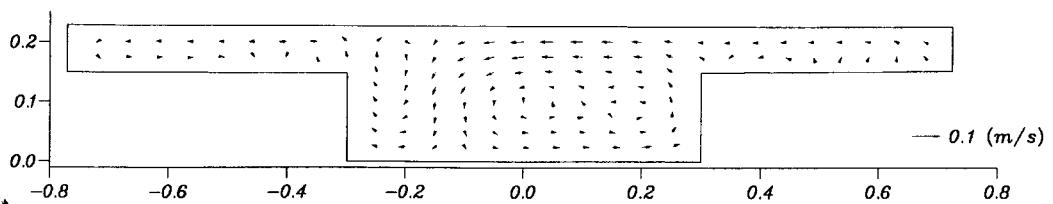
(b) No.7



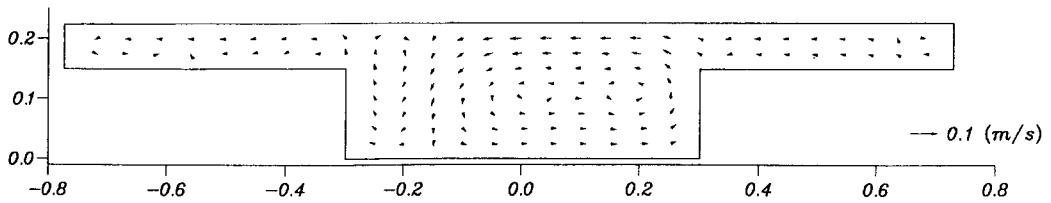
(c) No.6



(d) No.5

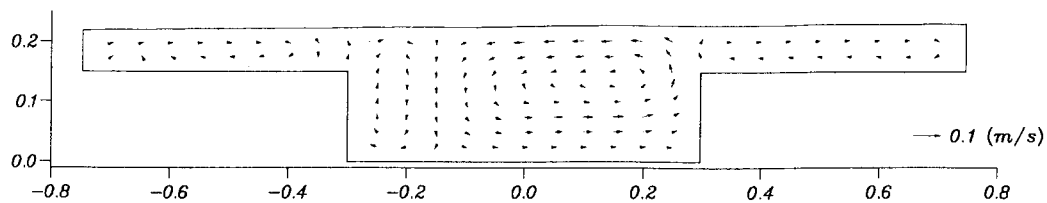


(e) No.4

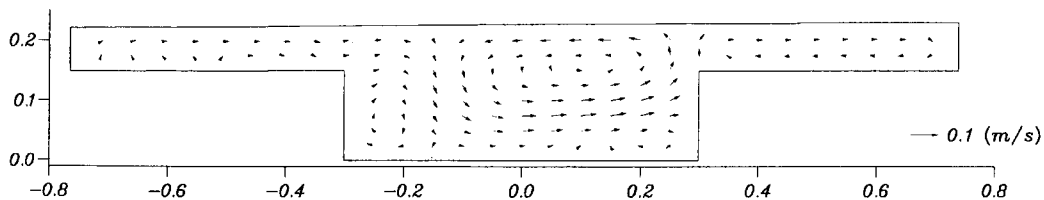


(f) No.3

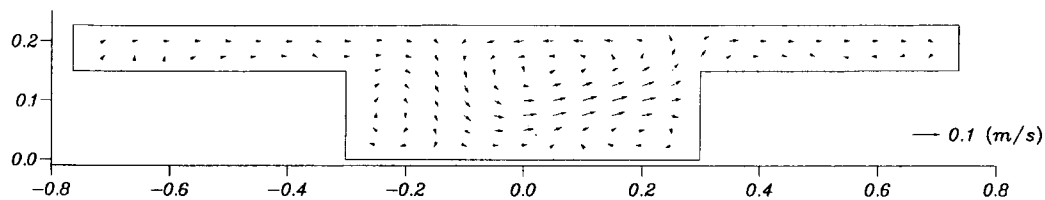
図-6.16(1) 複断面水路での横断面内2次流ベクトル



(g) No.2



(h) No.1



(i) No.0

図-6.16(2) 複断面水路での横断面内2次流ベクトル

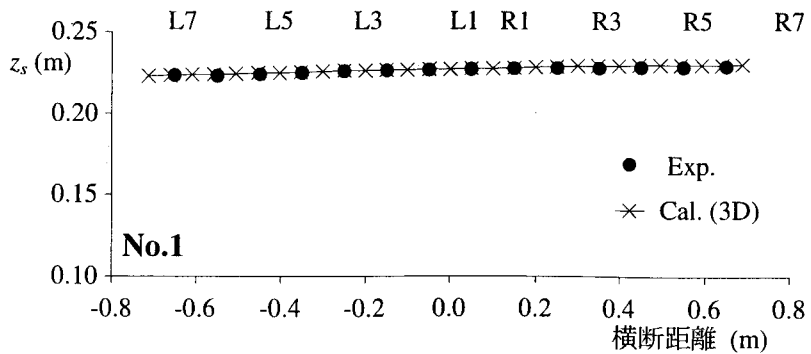
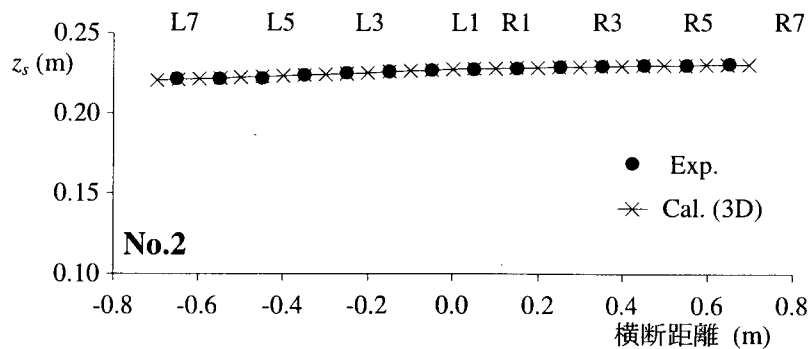


図-6.17 水位の横断分布の比較

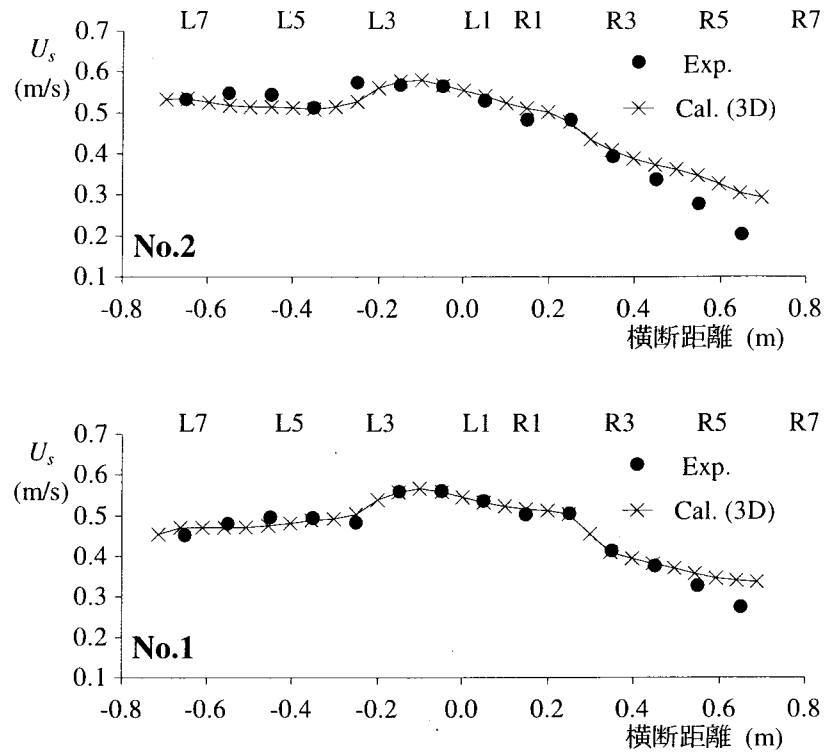


図-6.18 流速の横断分布の比較

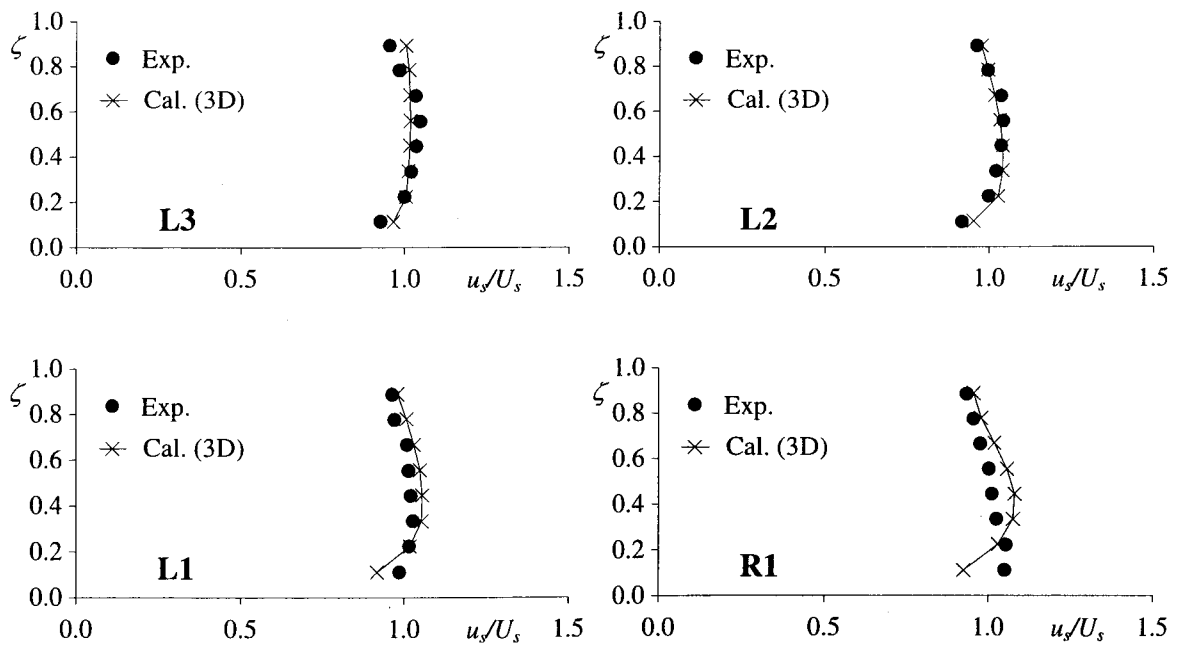


図-6.19(1) No. 2 断面における流速分布の比較

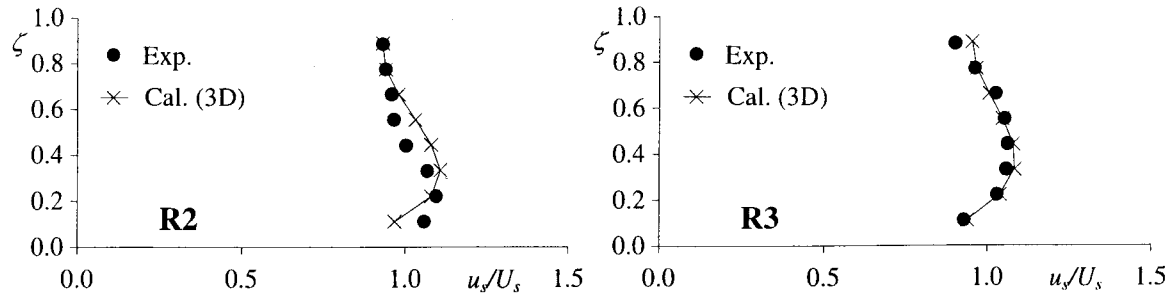


図-6.19(2) No. 2断面における流速分布の比較

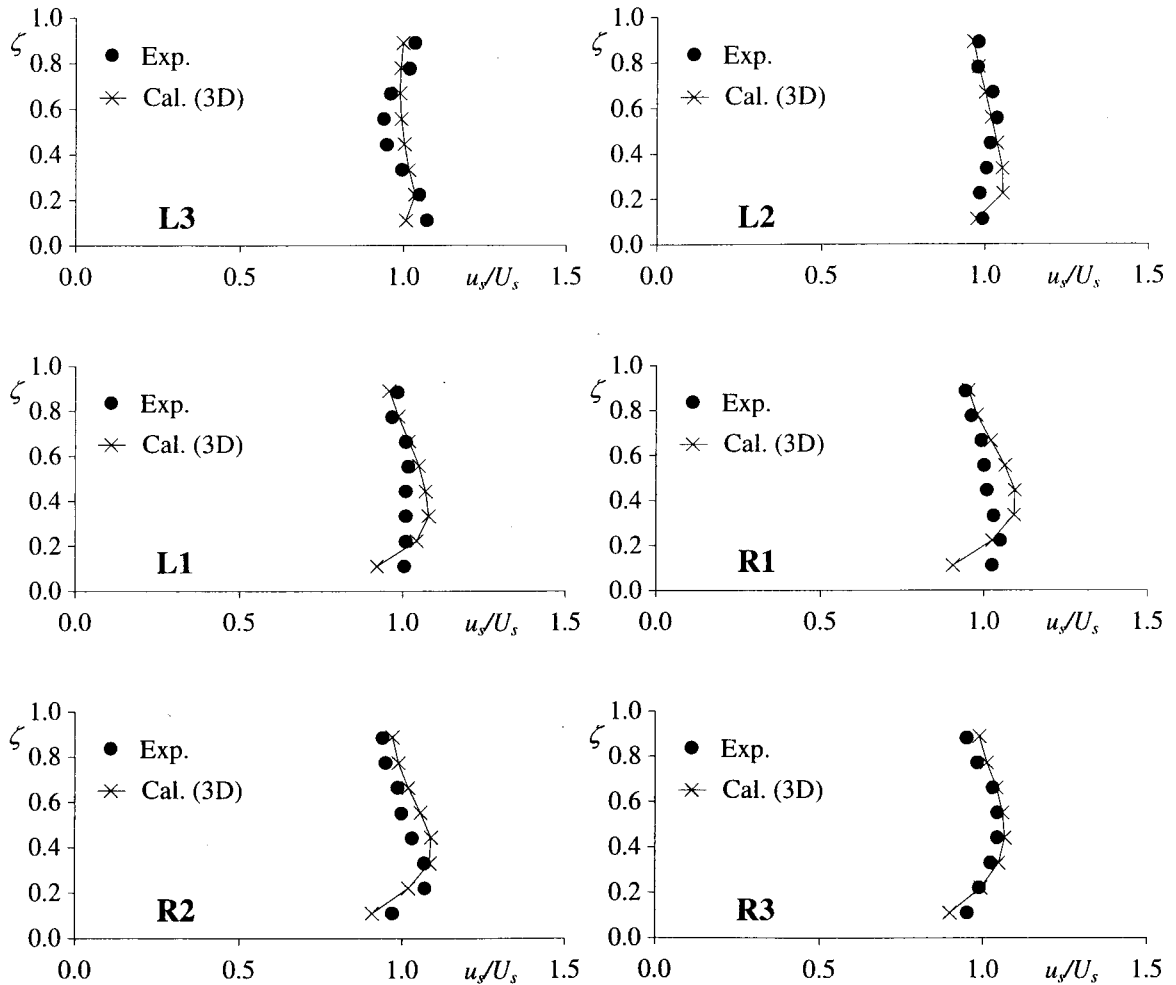


図-6.20 No. 1断面における流速分布の比較

#### 6.4 結語

本章では、移動一般座標系での3次元数値解析について検討した。まず、数値解析モデルを加速・減速流に適用し、モデルの検証を行った。

- (1) 加速流の場合、断面内中央において水面から路床へ落ち込む流れが生じ、減速流では逆に水面へ上昇する流れが見られた。
- (2) 実験結果と計算結果の比較を行い、3次元解析では加速流で生じる最大流速点の dip を再

現できた。また、流速分布については実験結果とほぼ適合しており、レイノルズ応力分布では、三角形分布より減少、増大する特徴が再現された。

次に、連続蛇行水路実験に適用した。

- (1) 主流方向流速ベクトルでは、最大流速点の dip する箇所が数多く見られた。水路の曲がりに伴って2次流の発達を確認された。
- (2) 水位、水深平均流速の横断分布は、実験結果とほぼ一致した。
- (3) 主流方向流速の分布形について実験結果と比較を行った。実験結果と同様、最大流速点の dip が再現され、実験結果にほぼ適合することを示した。

### 参考文献

- 1) 木村一郎，細田尚，音田慎一郎，富永晃宏：非線形  $k-\varepsilon$  モデルによる斜め越流型水制周辺の三次元流況に関する数値解析，応用力学論文集，Vol.5，pp.717-726，2002.
- 2) 木村一郎，細田尚，音田慎一郎，富永晃宏：越流型水制周辺の非定常三次元流れ構造に及ぼす水制設置角度の影響，水工学論文集，Vol.47，pp.717-726，2003.
- 3) 木村一郎，細田尚，音田慎一郎：完全スタガード移動一般曲線座標系における開水路乱流シミュレータの開発，四日市大学環境情報論集，Vol.5，pp.145-170，2002.
- 4) 越塚誠一：数値流体力学，培風館，1997.
- 5) Takizawa, A., Koshizuka, S. and Kondo, S. : Generalization of physical component boundary fitted co-ordinate (PCBFC) method for the analysis of free-surface flow, *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, Vol.15, pp.1213-1237, 1992.
- 6) Kimura, I. and Hosoda, T. : 3-D unsteady flow structures around rectangular column in open channels by means of non-linear  $k-\varepsilon$  model, *Proc. of 1st International Symposium on Turbulence and Shear Flow Phenomena*, Santa Barbara, USA, pp.1001-1006, 1999.
- 7) 木村一郎，細田尚：乱れ強さ非負条件を考慮した非線形  $k-\varepsilon$  モデルによる立方体周辺の流れの三次元解析，水工学論文集，Vol.44，pp.599-604，2000.
- 8) Hosoda, T., Sakurai, T., Kimura, I. and Muramoto, Y. : 3-D Computations of compound open channel flows with horizontal vortices and secondary currents by means of non-linear  $k-\varepsilon$  model, *J. Hydroscience and Hydraulic Eng.*, Vol.17, No.2, pp.87-96, 2000.
- 9) Gatski, T.B. and Speziale, C.G. : On explicit algebraic stress models for complex turbulent flows, *J. Fluid Mech.*, Vol.254, pp.59-78, 1993.
- 10) Hosoda, T., Kimura, I. and Onda, S. : Some necessary conditions for a non-linear  $k-\varepsilon$  model in classified flow patterns with a singular point, *Proc. 2<sup>nd</sup> Internatinal Symp. on Turbulence and Shear Flow Phenomena*, Stockholm, Vol.3, pp.155-160, 2001.
- 11) Hirt, C. W., Nichols, B. D. and Romero, N. C. : SOLA-A Numerical solution algorithm for transient

fluid flows, *Los Alamos Scientific Report*, LA-5852, 1975.

- 12) 杉山均, 秋山光庸, 松原珠: 複断面開水路内の乱流構造解析と縦渦生成に関する研究, 土木学会論文集, Vol.515, II-31, pp.55-65, 1995.
- 13) 細田尚: 開水路流れにおける乱流拡散機構に関する水理学的研究, 京都大学博士論文, 1990.

## 第7章 結論

本研究は、河川流域や海岸海域など様々な水域環境の防災、持続可能なマネジメントを考える際に必要となる、流れと土砂輸送（または地形変化）の実用的数値解析モデルの発展を目的として、開水路流れの水深積分モデルの高精度化を試みた。以下に、各章での検討内容、数値解析及び実験から得られた知見を要約し、本研究の結論とする。

まず、**第1章**では、本研究の背景、目的を述べるとともに、本論文の内容、構成について記述した。

**第2章**では、基礎式を水深平均流速で陽的かつ簡易に表すことに着目し、鉛直加速度を考慮した開水路流れの水深積分モデル（原形 Boussinesq 方程式）の改良について検討した。基礎式の誘導に際し、非回転条件に適合する流速分布形を求める方法と Madsen&Schaffer がポテンシャル流れに対して用いた線形分散関係の singularity を解消する分散項の修正法を適用した。さらに、時間積分を用いて分散項の修正を流速分布、圧力分布に反映させ、平均流速で表記した流速分布形を導いた。また、基礎式の誘導過程を考察することで、Madsen らの提案式における流速分布形について説明した。

導かれた基礎式を矩形水槽内水面振動現象に適用し、モデルの妥当性を検証した。まず、非回転条件のみを考慮した場合について線形解析と微小振幅波理論の比較を行った。原形 Boussinesq 方程式よりも線形分散関係が若干高波数まで適合したが、Madsen&Schaffer が指摘しているように、singularity が存在するため、大幅な改善に至らなかった。次に、本モデルの線形解析と微小振幅波理論の比較を行い、線形分散関係、流速分布が従来のモデルより高波数領域まで適合することを明らかにした。

また、非線形性が強い領域でのモデルの適用性を検討するために、非線形解析を行った。水深、平均流速を1次モードで表し、非線形領域における分散関係を求めた。分散関係が鉛直2次元数



値解析結果とほぼ一致することから非線形領域においても適用できることを示した。さらに、水深、平均流速に関して2次モードまでを考慮し、水面変動の時間発展、水平方向流速分布、底面での圧力分布の近似解を導いた。2次モードを組み込むことにより、水面形状について計算結果の特徴を再現した。

**第3章**では、水槽の境界形状が変化する場合を対象に、移動一般座標系での水深積分モデルを用いて水槽内流体挙動を検討した。まず、一定加速度場に置かれた水槽内水面挙動について考察した。初期の水面変形過程について特性曲線法による解析解を求め、左右両壁面から水面が変化し、中央に及ぶ様子が確認された。その後の水面挙動については、浅水流方程式による数値解析を行い、加速度が小さい場合には水面が振動することを示した。さらに、水深を直線分布で近似した簡易モデルを導き、数値解析結果との比較を行った。その結果、水面変動の振幅については両者でほぼ一致することを示した。一方、加速度が大きくなると、水槽内に流体のない部分が見られ、時間の経過とともに水面がある一定の場所で固定された。

次に、水槽の壁が一定速度で移動する場合について、浅水流方程式による数値解析を行い、壁の移動速度が $\sqrt{gh_0}$ を超える場合、超えない場合とも段波の進んでいく様子が確認された。また、段波上流部の波高について理論解析を行い、壁の移動速度が小さい場合には計算結果と解析解がほぼ一致することを示した。

さらに、水槽の壁が一定周期で振動する場合について数値解析を行うとともに、線形解を誘導した。壁面の振動振幅が小さく、角振動数が小さい場合には計算結果と線形解はほぼ一致することを示した。また、線形解の係数の分母を0とすることで、水面の振動振幅と壁面の角振動数に関する共鳴関係が得られた。壁の振動振幅を固定し、初期水深 $h_0 = 0.1\text{m}$ 、水槽の長さ $L = 1.0\text{m}$ 、壁の振動振幅 $d_w = 0.02\text{m}$ の条件で角振動数を変化させて数値実験を行うと、無次元角振動数が1.5付近と共鳴点近傍で計算結果と線形解が一致しなかった。その理由として、線形解の時間モードを壁の振動数と同じに仮定したこと、及び非線形性によるためであることを説明した。

最後に、振動台上の水槽内流体振動について考察した。まず、水理実験を行い、水面挙動の特性について整理した。また、浅水流方程式による数値解析、線形解を求めるとともに鉛直加速度を考慮した場合についても線形解を誘導した。振動振幅、周波数、初期水深の条件によって、浅水流方程式による数値解析、線形解、原形 Boussinesq 方程式の線形解の3者が実験結果と一致する場合、数値解析が再現する場合、原形 Boussinesq 方程式の線形解が適合する場合を示した。さらに、線形解から水面の振動振幅と壁面の角振動数に関する共鳴関係を求め、水面振動の特性について考察した。

**第4章**では、小規模河床波の発生・発達過程と流れの抵抗則について水深積分モデルによる数値解析を行った。その際、底面せん断応力の評価が問題となるため、まず、河床波上や河道蛇行部流れにおいて生じる流れの加速・減速をモデル化し、加速・減速流の流速分布に関する簡易モデルを誘導した。また、従来適用されている底面せん断応力の評価式と比較することで、評価式の適用性について検討した。底面せん断応力と水深勾配  $dh/dx$  の関係を考察すると、従来の提案式と同様に、ほぼ直線分布となることが示され、その有効性を物理的に明らかにした。次に、鉛直加速度を考慮した水深積分モデルと非平衡流砂モデルを組み合わせ、小規模河床波の発生・発

達過程に関する数値解析を行った。砂堆の場合では、砂堆の発達に伴う抵抗の増加を明らかにした。また、波数スペクトルの時間変化を調べ、砂堆の発生初期段階では実験結果と同様に共鳴関係を満足する波長の波が卓越すること、発達の時間スケールが従来の研究とほぼ一致することを示した。さらに、砂堆の形状特性についても既往の実験結果と比較し、ほぼ適合することを示した。河床波の領域区分、流れの抵抗則についても、既往の研究と比較を行い、計算結果が実験結果とほぼ一致することから本数値解析モデルの妥当性を明らかにした。

**第5章**では、湾曲部、河道蛇行部で生じる2次流を水深積分モデルに組み込み、モデルの高精度化について検討した。まず、2次流のモデル化を物理的に考察し、本モデルが実験結果に見られるような流速分布の一様化、最大流速点の dip を再現できるとともに、従来の線形モデルでは運動量輸送係数が過大評価されることを示した。さらに、導かれたモデルを連続蛇行水路の実験に適用し、主流方向流速分布が実験結果とほぼ一致することを示した。

**第6章**では、上記のモデルの改良に際し必要となる3次元乱流解析を行った。基礎式には、前述のように、自由境界である水面や河床を座標軸として記述した移動一般座標系における反変成分表示のものをを用いた。第4章と関連する加速・減速流、第5章と関係する連続蛇行水路に適用し、実験結果と比較することでモデルの妥当性を検証した。その結果、計算結果がほぼ実験結果と適合することを示した。

以上、本研究では、開水路流れの水深積分モデルの高精度化について検討してきたが、最後に今後の検討課題についてまとめる。

- (1) 第2章、第3章では、原形 Boussinesq 方程式の改良を行うとともに、モデルの検証として基本的な数値波動水槽の1次元流体解析を検討した。沿岸域の波浪など、実際の波動現象に適用するには、本モデルを平面2次元モデルに拡張する必要があるため、今後の大きな課題として考えられる。
- (2) 第4章では、一定流量のもとでの小規模河床波の発生・発達過程と流れの抵抗則の数値解析について検討した。しかし、1洪水で、例えば流量の小さい領域で発生した河床波が流量の増大とともに消滅し、減少とともに再び発生すること、そして数多くの実験及び観測データから流量が変化する場合の流量－水位曲線がループを描き、ヒステリシス現象を示すことが報告されている。従って、流れの基礎式に本研究で適用した水面形方程式ではなく、非定常モデルに発展させ、流量が変化する場合の河床波の発達・減衰について検討する必要があるだろう。
- (3) 第5章では、2次流をモデル化し、湾曲流の水深積分モデルの高精度化について検討した。従来の研究で、主流と2次流の遅れを考慮する必要性が指摘されていることから、位相差を考慮するとともに、このモデルを水深積分モデルに組み込んで、更なるモデルの発展に取り組みたい。

河川流、河床変動モデルは、流速分布の一様性、静水圧仮定をした最も基本的な水深積分モデルをもとに、対象とする現象のモデル化を組み込むことで、モデルの高精度化が検討されてきた。

本研究もこのような方向性の中で、積分型モデルの理論をさらに発展させようとしたものであり、検討すべき課題は多く残されているものの、本研究で提示したモデルが河川流、河床変動解析を行う際に、十分な実用性を有していると考えている。こうした中で、本研究が、河川流、河床変動を予測する上で、工学的に有用な要素技術の一助となれば幸いである。

## 謝 辞

本研究を進めるにあたり、御多忙の中、終始熱心な御指導を賜った京都大学大学院工学研究科都市社会工学専攻 細田 尚教授に深甚なる謝意を表します。先生には、研究の方向性をはじめ、数値解析法、理論の構築の指針について提言して頂くとともに、研究に対する姿勢を学ばせて頂きました。満足のいくよう、本研究を取りまとめることができたのも、ひとえに先生の支えがあったからであると考えております。

また、本研究を取りまとめるにあたり、適切な御助言を頂いた京都大学大学院工学研究科都市社会工学専攻 岸田 潔助教授、ならびに原田英治助手（現 豊田工業高等専門学校講師）に深く御礼申し上げます。

松江工業高等専門学校 木村一郎助教授には、遠方にも関わらず、プログラムなど多くのご教示を頂きました。深く御礼申し上げます。また、本研究を行うにあたり、数理水理学研究集会のメンバーの方には、発表の場を提供していただくとともに、活発な議論を通して研究の内容を深めることができました。厚く御礼申し上げます。

第3章を検討するにあたり、水産庁 浜崎宏正氏、東京大学大学院工学系研究科 三浦倫秀氏、京都大学工学部技官 仙波秀治氏には、水理実験、データ整理に多大なご協力を頂きました。深く感謝致します。また、大学院からの配属にも関わらず、温かく迎えて頂いた京都大学河川工学研究室の皆様にも心より感謝申し上げます。

最後に、京都大学大学院への進学を快諾し、あらゆる面で筆者をサポートしてくれた、父 音田倫俊、母 真智子に心から感謝致します。